unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Algumas Considerações sobre Espaços de Eilenberg-MacLane

Évelin Meneguesso

Orientadora: Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti

Co-orientador: Prof. Dr. João Peres Vieira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto - SP
Março - 2007

Meneguesso, Évelin
Algumas considerações sobre Espaços de Eilenberg - MacLane/ Évelin Meneguesso - São José do Rio Preto : [s.n.], 2007. 92 f.:il ; 30cm.

Orientadora: Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Co-orientador: João Peres Vieira
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1.Topologia Algébrica. 2.Grupos de Homotopia. 3.Eilenberg-MacLane, Espaços de. I. Fanti, Ermínia de Lourdes Campello. II. Vieira, João Peres. III. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU – 515.14

COMISSÃO JULGADORA

Titulares
Profª. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti - Orientadora
Prof. Dr. Tomas Edson Barros
Profª. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade

Suplentes
Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
Profa. Dra. Luciana de Fátima Martins Brito

"O temor do Senhor é o princípio da ciência;
os loucos desprezam a sabedoria e a instrução".
Provérbios, 1:7.

Dedico aos meus pais e meus irmãos.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por me conceder a graça de concluir mais esta etapa, por ter me fortalecido nos momentos difíceis e pelas pessoas que colocou no meu caminho. Em especial agradeço:

Aos meus pais e meus irmãos pelo carinho, pelos conselhos, pela confiança e apoio que deles recebi durante todos os anos de minha vida.

À Profª. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti por me iniciar nos estudos de Topologia Algébrica, pela amizade, pela orientação, paciência, disponibilidade e tempo dedicado a este projeto.

Ao Prof. Dr. João Peres Vieira pela co-orientação e auxílio nas correções necessárias para a boa apresentação deste trabalho.

À Profª. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, pela amizade, colaboração e pela sua alegria sempre presente.

À Profª. Dra. Denise de Mattos, pelas sugestões durante o Exame Geral de Qualificação.

À todos os professores que tive desde o colégio, especialmente à Profª. Dina que foi quem me ensinou a amar a Matemática. Agradeço também aos professores do Departamento de Matemática do Ibilce, pela formação acadêmica.

Às queridas amigas Marina, Michelle, Cibele e Aline pelo carinho, apoio e agradáveis momentos que passamos juntas.

Ao meu namorado Rodrigo, pelo apoio e compreensão pelo tempo dedicado aos estudos em detrimento à sua atenção.

Não poderia deixar de agradecer à Capes, pelo apoio financeiro sem o qual não seria possível a realização desse projeto.

Que Deus os abençoe.

Sumário

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é mostrar a existência dos complexos de Eilenberg-MacLane, ou $K(G, n)$-espaços (como são comumente chamados), para G um grupo arbitrário se $n = 1$, e G abeliano, se $n \geq 2$. Esses espaços desempenham um papel muito importante na Topologia Algébrica, principalmente na conexão entre homotopia e (co)homologia

Palavras chave: Grupos de Homotopia, CW-Complexos, Aproximação Celular, Espaços de Eilenberg-MacLane.

Abstract

The main purpose of this work is to show the existence of the Eilenberg-Maclane´s complexes, or $K(G, n)$-spaces (as they are usually called), for an arbitrary group G if $n = 1$, and G abelian, if $n \geq 2$. Such spaces play a very important role in Algebraic Topology, mainly in the connection between homotopy and (co)homology.

Key words: Homotopy Groups, CW-Complexes, Cellular Approximation, Eilenberg-MacLane Spaces.

Introdução

Dado um espaço topológico X podemos associar a ele uma família de grupos "$\pi_j(X)$", $j \geqslant 1$, denominados *grupos de homotopia*. Se G é um grupo e n é um inteiro, $n \geq 1$, um espaço topológico conexo X é dito um espaço *Eilenberg-MacLane do tipo* (G, n) ou um $K(G, n)$-*espaço*, ou ainda um espaço *Eilenberg-MacLane* $K(G, n)$, se $\pi_j(X) = 0$, $\forall j \neq n$ e $\pi_n(X) \simeq G$. Tais espaços desempenham um papel muito importante na Topologia Algébrica principalmente na conexão entre homotopia e (co)homologia. O nome é devido a Samuel Eilenberg e Saunders MacLane, mas o caso $n = 1$ foi estudado por Hurewicz. A existência de um espaço $K(G, n)$, $n > 1$, só faz sentido para G abeliano, uma vez que os espaços $K(G, n)$ são definidos em função dos grupos de homotopia "$\pi_n(X)$" e esses são abelianos se $n > 1$. Uma importante propriedade dos espaços $K(G, n)$ é que, para um grupo G e Y um CW-complexo, existe uma bijeção entre $[Y, K(G, n)]$ (o conjunto das classes de homotopia de aplicações de Y em $K(G, n)$, com pontos base) e $H^n(Y, G)$, o grupo de cohomologia de Y com coeficientes em G. Os $K(G, 1)$ - espaços, em particular, são muito úteis na teoria dos grupos. Tais espaços estabelecem uma relação entre a cohomologia de grupos e a de espaços uma vez que, para cada k, o grupo de cohomologia de um grupo G com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo M, $H^k(G, M)$, é isomorfo a $H^k(X, \mathbf{M})$, onde X é um $K(G, 1)$ e $\mathbf{M}$ é um sistema de coeficientes locais sobre X associado ao $\mathbb{Z}G$-módulo M.

O objetivo principal deste trabalho é mostrar a existência dos espaços de Eilenberg-MacLane, ou $K(G, n)$-espaços, para G um grupo arbitrário se $n = 1$, e G abeliano, se $n \geq 2$. Para tanto faz-se necessário o estudo de vários conceitos e resultados. Dentre os conceitos destacamos, por exemplo, os de grupos de homotopia de ordem superior (caso absoluto e relativo), CW-complexos e aplicação celular, e dentre os resultados, o de Aproximação Celular para Pares e a Torre de Postnikov. Ressaltamos que o cálculo do grupo fundamental do bouquet de círculos, e mais geralmente do n-ésimo grupo de homotopia do bouquet de n-esferas, desempenham um papel importante no desenvolvimento do trabalho.

As principais referências bibliográficas são [5] e [7].

No *Capítulo* 1, apresentamos um estudo sobre grupos de homotopia de ordem superior. Inicialmente apresentamos três definições equivalentes do n-ésimo grupo de homotopia de um espaço X baseado no ponto x_0, denotado por $\pi_n(X, x_0)$. Em seguida algumas proposições básicas e exemplos. Mostramos que o grupo $\pi_n(X, x_0)$ de qualquer espaço topológico X é abeliano se $n \geq 2$. Uma propriedade útil dos grupos de homotopia de ordem superior é que $\pi_n(B, b_0)$ é isomorfo ao $\pi_n(E, e_0)$ onde (E, p) é um espaço de recobrimento de B e $b_0 = p(e_0)$. Apresentamos também a definição de grupos de homotopia relativa $\pi_n(X, A, x_0)$ para um par (X, A) com ponto base $x_0 \in A$. Uma importante propriedade dos grupos de homotopia relativa $\pi_n(X, A, x_0)$ é que eles se encaixam numa seqüência exata longa.

No *Capítulo* 2 apresentamos a definição de CW-complexos e alguns exemplos para ilustrar tal conceito. Em seguida mostramos algumas construções utilizadas no decorrer deste trabalho. Mostramos também a relação entre o grupo fundamental de um espaço conexo por caminhos X e o grupo fundamental de X^* obtido de X por adjunção (colagem) de uma coleção de 2-células abertas. Como conseqüência disto obtemos um resultado muito útil para a prova da existência de $K(G, 1)$ - espaços, o Corolário 2.2.1:

Dado um grupo G qualquer, existe um CW-complexo 2-dimensional Y, conexo por caminhos, tal que $\pi_1(Y)$ é isomorfo a G. Se G tem uma apresentação com um número finito de geradores e relações então podemos obter Y compacto.

Após esse resultado apresentamos o Teorema 2.2.2, que nos garante que o grupo fundamental de um CW-complexo conexo X só depende do seu 2-esqueleto X^2, e mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente. Por fim são apresentados nesse capítulo os resultados sobre Aproximação Celular para espaços e pares de espaços (Proposição 2.3.2) e a construção da Torre de Postnikov (Proposição 2.3.3), que são de fundamental importância para a construção dos $K(G, n)$-espaços.

No *Capítulo* 3 nos dedicamos essencialmente à prova da existência dos $K(G, n)$-espaços. Inicialmente definimos o que é um $K(G, n)$-espaço (ou espaço de Eilenberg Mac-Lane) e apresentamos algumas propriedades. Em especial, que para um CW-complexo X, ser $K(G,1)$ é equivalente a dizer que esse espaço X tem $\pi_1(X) \simeq G$ e o espaço de recobrimento universal contráctil. A prova da existência dos $K(G,n)$ - espaços é tratada em dois casos separados: $n = 1$ e $n \geq 2$, devido ao fato que $\pi_n(X, x_0)$ são abelianos para $n \geq 2$. Para o caso $n = 1$ recorremos ao Corolário 2.2.1 e usamos a Torre de Postnikov. Já para o caso $n \geq 2$, precisamos do resultado seguinte (Proposição 3.2.2), que é similar ao dado no caso $n = 1$, e que para ser obtido usa um resultado que relaciona, sob certas hipóteses, os grupos de homotopia de um par (X, A) e do quociente X/A (Proposição 3.2.1), além de outros, como por exemplo, o cálculo do n-ésimo grupo de homotopia do bouquet de n- esferas.

Para todo grupo abeliano G e $n \geq 2$, existe um CW-complexo $(n-1)$-conexo, de dimensão $n+1$, tal que $\pi_n(X) \simeq G$.

Com esse resultado e o da Torre de Postnikov provamos então a existência dos espaços Eilenbeg Mac-Lane "$K(G,n)$" para $n \geq 2$ e G um grupo abeliano qualquer (Teorema 3.2.3). Finalizando o Capítulo apresentamos alguns exemplos, analisando os passos da construção, e fazemos algumas considerações sobre os espaços de Eilenberg-MacLane.

No *Apêndice* são apresentados alguns pré-requisitos, conceitos e resultados sobre grupo fundamental, com destaque para o grupo fundamental do círculo unitário S^1 e o Teorema de Van-Kampen. Esses pré-requisitos são úteis para definirmos grupos de homotopia de ordem superior e para melhor compreensão do texto, porém são dispensáveis para quem tem familiaridade com tais tópicos.

Capítulo 1

Grupos de Homotopia de Ordem Superior

A definição dos grupos de homotopia de ordem superior de um espaço X, usualmente denotados por "$\pi_n(X, x_0)$" $n \geq 2$, foi dada nos anos 1932 - 1935 por Eduard Cech (1893 - 1960) e Witold Hurewicz (1904-1956) e é de certo modo, uma extensão natural do conceito de *grupo fundamental* de X "$\pi_1(X, x_0)$"(vide Apêndice). Foi Hurewicz quem deu a definição mais satisfatória para os grupos de homotopia de ordem superior e provou as propriedades fundamentais. Nós apresentaremos aqui três definições equivalentes para tais grupos (definições 1.1.1, 1.1.2 e 1.1.5).

Se n é um inteiro positivo usamos o símbolo I^n para denotar o cubo unitário n-dimensional

$$I^n = \{t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n; \quad 0 \leq t_i \leq 1 \ \ \forall i\}$$

e ∂I^n, chamado o bordo de I^n, denota só seus pontos do bordo

$$\partial I^n = \{t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in I^n; \quad \exists i, \ t_i = 0 \ ou \ 1\}.$$

(Não devemos confundir aqui o símbolo ∂ com o operador bordo normalmente usado na teoria de homologia.)

1.1 Definições Equivalentes de $\pi_n(X, x_0)$

Definição 1.1.1. (***A***) *Seja X um espaço e x_0 um ponto de X. Para um dado inteiro positivo n considere o conjunto $F_n(X, x_0)$ de todas as aplicações contínuas α do n-cubo unitário I^n em X para os quais $\alpha(\partial I^n) = x_0$. Defina uma relação de equivalência $\sim_{x_0}$ em $F_n(X, x_0)$, a saber, α é equivalente módulo x_0 a β em $F_n(X, x_0)$, escrito $\alpha \sim_{x_0} \beta$, se existe uma homotopia*
$H : I^n \times I \longrightarrow X$ tal que

$$
\begin{array}{ll}
H(t_1, \ldots, t_n, 0) = \alpha(t_1, \ldots, t_n) & \\
H(t_1, \ldots, t_n, 1) = \beta(t_1, \ldots, t_n), & (t_1, \ldots, t_n) \in I^n, \\
e & \\
H(t_1, \ldots, t_n, s) = x_0, & (t_1, \ldots, t_n) \in \partial I^n, s \in I.
\end{array}
$$

Sob esta relação de equivalência em $F_n(X, x_0)$, a classe de equivalência determinada por α é denotada $[\alpha]$ e chamada a classe de homotopia de α módulo x_0 ou simplesmente classe de homotopia de α.

Defina uma operação $*$ sobre $F_n(X, x_0)$ como segue: para cada α e β em $F_n(X, x_0)$,

$$(\alpha * \beta)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2 \ldots, t_n), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Note que a operação $*$ é completamente determinada pela primeira coordenada do ponto variável $(t_1, \ldots, t_n)$ e que a continuidade de $\alpha * \beta$ segue do Lema da Continuidade (A.1.1). A operação $*$ induz uma operação $\bullet$ sobre o conjunto das classes de homotopia de $F_n(X, x_0)$:

$$[\alpha] \bullet [\beta] = [\alpha * \beta].$$

Com esta operação, o conjunto das classes de equivalência de $F_n(X, x_0)$ é um grupo. Este grupo é chamado o n-ésimo grupo de homotopia de X com ponto base x_0 e é denotado por $\pi_n(X, x_0)$.

Observação 1.1.1. *Como no caso do grupo fundamental, pode-se verificar que:*

(*1*) *A relação $\sim_{x_0}$ é uma relação de equivalência sobre $F_n(X, x_0)$.*

(2) *A operação* $\bullet$ *está bem definida. Em outras palavras, se* $\alpha \sim_{x_0} \alpha^{'}$ *e* $\beta \sim_{x_0} \beta^{'}$ *então* $\alpha * \beta \sim_{x_0} \alpha^{'} * \beta^{'}$.

(3) *Com a operação* $\bullet$, $\pi_n(X, x_0)$ *é de fato um grupo. Sua identidade é a classe* $[c]$ *determinada pela aplicação constante* $c(I^n) = x_0$. *A inversa* $[\alpha]^{-1}$ *de* $[\alpha]$ *é a classe* $[\alpha^{-1}]$ *onde* α^{-1}, *chamada a* inversa de α, *é definida por*

$$\alpha^{-1}(t_1, \ldots, t_n) = \alpha(1 - t_1, \ldots, t_n), \quad (t_1, \ldots, t_n) \in I^n.$$

Para a próxima definição usamos que o espaço quociente de I^n obtido pela identificação do ∂I^n a um ponto é homeomorfo a n-esfera S^n. Vamos assumir que o ponto de identificação é o ponto $1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ de S^n, que tem a primeira coordenada igual à um e as demais nulas. Então o conjunto (e conseqüentemente o grupo,) $\pi_n(X, x_0)$ pode ser definido em termos de aplicações de $(S^n, 1)$ em (X, x_0), como segue:

Definição 1.1.2. (***B***) *Para um dado inteiro positivo* n, *considere o conjunto* $G_n(X, x_0)$ *de todas as aplicações contínuas* α, *de* S^n *em* X, *tal que* $\alpha(1) = x_0$. *Defina uma relação de equivalência do seguinte modo: Para* α *e* β *em* $G_n(X, x_0)$, α *é equivalente módulo* x_0 *à* β, *escrito* $\alpha \sim_{x_0} \beta$, *se existe uma homotopia* $H : S^n \times I \to X$ *tal que* $H(\cdot, 0) = \alpha$ *e* $H(\cdot, 1) = \beta, H(1, s) = x_0$ *para* $s \in I$.

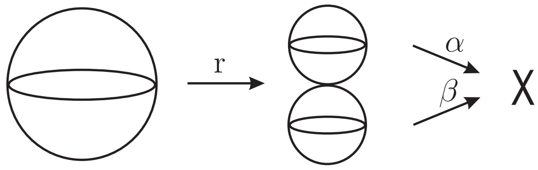
A classe de equivalência determinada por α, *a qual denotamos por* $[\alpha]$, *é chamada a classe de homotopia de* α *e consideramos o conjunto das classes de homotopia* $\pi_n(X, x_0) := G_n(X, x_0)/ \sim_{x_0}$.

A operação $\circ$ *em* $\pi_n(X, x_0)$ *é definida em termos da identificação de* I^n *com* S^n. *Mais precisamente, sejam* $\alpha, \beta \in G_n(X, x_0)$. *A aplicação identificação* q *leva os conjuntos*

$$A = \{(t_1, \ldots, t_n) \in I^n; t_1 \leq \frac{1}{2}\}, \quad B = \{(t_1, \ldots, t_n) \in I^n; t_1 \geq \frac{1}{2}\}$$

nos hemisférios A' *e* B', *respectivamente, de* S^n *cuja intersecção* $A' \cap B' = q(A \cap B)$ *é homeomorfo a* S^{n-1}.

Imagine que $A' \cap B'$ *é identificado com o ponto base 1 pela aplicação identificação* r. *O espaço resultante consiste de duas* n*-esferas tangentes no seus*



pontos comuns. O produto $\alpha * \beta : S^n \longrightarrow X$ *é agora definido por*

$$(\alpha * \beta)(x) = \begin{cases} \alpha(r(x)), & x \in A' \\ \beta(r(x)), & x \in B'. \end{cases}$$

A operação $\circ$ *em* $\pi_n(X, x_0) := G_n(X, x_0)/\sim$ *é então definida por*

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta].$$

Com essa operação $\pi_n(X, x_0)$ *é um grupo, também chamado o n-ésimo grupo de homotopia de* X *com ponto base* x_0*.*

Observação 1.1.2. *As definições A(1.1.1) e B(1.1.2) são definições equivalentes dos grupos* $\pi_n(X, x_0)$*, isto é, os dois grupos obtidos são isomorfos.*

De fato, seja $q : I^n \longrightarrow S^n$ a aplicação que identifica ∂I^n ao ponto 1. Para cada $\alpha : S^n \longrightarrow X$, elemento de $G_n(X, x_0)$, associamos a aplicação $\alpha' := \alpha \circ q$.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "\alpha"] & X \\ I^n \arrow[u, "q"] \arrow[ur, dashed, "\alpha\circ q"'] & \end{tikzcd}$$

Pode-se verificar que a aplicação $\psi : G_n(X, x_0) \longrightarrow F_n(X, x_0)$, que a cada $\alpha \in G_n(X, x_0)$ associa $\alpha' := \alpha \circ q \in F_n(X, x_0)$, é bijetora e ainda considerando as classes de equivalência dos elementos de acordo com as definições A (1.1.1) e B (1.1.2) temos: $[\alpha] = [\beta]$ (em $G_n(X, x_0)/\sim_{x_0}$) se, e somente se, $[\alpha'] = [\beta']$ (em $F_n(X, x_0)/\sim_{x_0}$). Logo ψ induz uma aplicação bijetora nos espaços quocientes $\tilde{\psi} : [\alpha] \mapsto [\alpha']$. Além disso $\tilde{\psi}$ é homomorfismo de grupos pois pode-se verificar que $\tilde{\psi}([\alpha] \circ [\beta]) = \tilde{\psi}([\alpha * \beta]) = [(\alpha * \beta) \circ q] = [(\alpha \circ q) * (\beta \circ q)] = [\alpha'] \bullet [\beta'] = \tilde{\psi}([\alpha]) \bullet \tilde{\psi}([\beta])$. Assim $\tilde{\psi}$ é um isomorfismo.

A terceira descrição do n-ésimo grupo de homotopia requer uma topologia para o conjunto de laços de X baseados em x_0.

Definição 1.1.3. *Seja* F *uma coleção de aplicações contínuas de um espaço* Y *em um espaço* Z*. Se* K *é um subconjunto compacto de* Y *e* U *é um aberto de* Z *, seja*

$$W(K, U) = \{\alpha \in F; \alpha(K) \subset U\}.$$

A família de todos esses conjuntos $W(K, U)$ *onde* K *percorre todos os compactos em* Y*, e* U *todos os subconjuntos abertos de* Z*, é uma sub-base para uma topologia em* F*. Esta topologia é chamada a topologia compacto-aberta para* F*.*

Como aplicaremos a topologia compacto-aberta somente sobre o conjunto de laços num espaço X, repetimos a definição para este caso:

Definição 1.1.4. *Seja* X *um espaço e* x_0 *um ponto de* X*. Considere o conjunto* $\Omega(X, x_0)$ *de todos os laços em* X *com ponto base* x_0*. Se* K *é um subconjunto compacto de* I *e* U *é aberto em* X*, seja*

$$W(K, U) = \{\alpha \in \Omega(X, x_0); \alpha(K) \subset U\}.$$

A família de todos os conjuntos $W(K, U)$*, onde* K *é compacto em* I *e* U *é aberto em* X*, é uma sub-base para uma topologia em* $\Omega(X, x_0)$*. Esta topologia é a topologia compacto-aberta para* $\Omega(X, x_0)$*.*

Note que abertos básicos na topologia compacto-aberta tem a forma

$$\bigcap_{i=1}^{r} W(K_i, U_i)$$

onde $K_1, K_2, \ldots, K_r$ são subconjuntos compactos de I e $U_1, U_2, \ldots, U_r$ são abertos de X. Um laço α pertence a este aberto básico se, e somente se, $\alpha(K_i) \subset U_i$, para cada $i = 1, 2, \ldots, r$.

Proposição 1.1.1. *Se* X *é um espaço métrico, a topologia compacto-aberta em* $\Omega(X, x_0)$ *é equivalente à topologia da convergência uniforme.*

Demonstração: Seja d a métrica sobre X. Recordemos que a topologia da convergência uniforme em $\Omega(X, x_0)$ é determinada pela métrica ρ definida como se segue: Se α e β pertencem a $\Omega(X, x_0)$ então

$$\rho(\alpha, \beta) = sup\{d(\alpha(t), \beta(t)), t \in I\}.$$

Então a topologia da convergência uniforme tem como uma base o conjunto de todas as vizinhanças esféricas

$$S(\alpha, r) = \{\beta \in \Omega(X, x_0); d(\alpha, \beta) < r\}$$

onde $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ e r é um número positivo.

Denotemos por T e T', respectivamente, a topologia compacto-aberta e a topologia da convergência uniforme para $\Omega(X, x_0)$. Vejamos que $T \subset T'$. Seja $W(K, U)$ um aberto sub-básico em T, onde K é compacto em I e U é aberto em X. Seja $\alpha \in W(K, U)$. Como o conjunto compacto $\alpha(K)$ está contido em U, existe um número positivo ε tal que qualquer ponto p de X com $d(p, \alpha(K)) < \varepsilon$ temos que $p \in U$. Para obter tal ε, considere $f : \alpha(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) := d(x, X - U)$. Então como f é contínua e $\alpha(K)$ é compacto existe o mínimo de f, ou seja, existe $t_0 \in K$ tal que $f(\alpha(t_0)) \leq f(\alpha(t)), \forall t \in K$. Então $d(\alpha(t_0), X - U) \leq d(\alpha(t), X - U), \forall t \in K$. Tome $\varepsilon = d(\alpha(t_0), X - U)$.

Considere o aberto básico $S(\alpha, \varepsilon)$ em T'. Se $\beta \in S(\alpha, \varepsilon)$, então para cada t em K,

$$d(\beta(t), \alpha(K)) = inf\{d(\beta(t), u), u \in \alpha(K)\} \leq d(\beta(t), \alpha(t)) < \varepsilon.$$

Assim $\beta(t)$ está em U. Conseqüentemente $\beta(K) \subset U$, então $\beta \in W(K, U)$. Agora temos que

$$\alpha \in S(\alpha, \varepsilon) \subset W(K, U)$$

e assim $W(K, U)$ é aberto em T'. Então $T \subset T'$ pois T' contém uma sub-base para T.

Vejamos agora que $T' \subset T$. Seja $S(\gamma, r)$, com centro γ e raio $r > 0$ um aberto básico em T'. Para provar que $S(\gamma, r)$ está em T, é suficiente encontrar um elemento de T que contém γ e está contido em $S(\gamma, r)$. Seja $\{U_j\}$ uma cobertura de X por abertos com diâmetros menores que r, e seja η um número de Lebesgue para a cobertura $\{\gamma^{-1}(U_j)\}$ de I. Seja $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ uma subdivisão de I por pontos sucessivos diferindo por, no máximo, η. Então para $i = 1, 2, \ldots, n$, γ leva cada um dos conjuntos compactos $K_i = [t_{i-1}, t_i]$ em um dos abertos da cobertura $\{U_j\}$. Para cada i escolha um aberto, que denotaremos por U_i, tal que

$$\gamma(K_i) \subset U_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Então

$$\gamma \in \bigcap_{i=1}^{n} W(K_i, U_i)$$

e este conjunto é aberto em T. Se $\beta \in \bigcap_{i=1}^{n} W(K_i, U_i)$ então $\rho(\gamma, \beta)$ não pode exceder o máximo dos diâmetros de $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Assim $\rho(\gamma, \beta) < r$, e portanto $\beta \in S(\gamma, r)$. Então $S(\gamma, r)$ é aberto em T, e T contém T' pois contém uma base de T'. Com isso temos que $T \subset T'$ e $T' \subset T$, logo $T = T'$.

Definição 1.1.5. (***C***) *Seja X um espaço com $x_0 \in X$, e considere o conjunto $\Omega(X, x_0)$ dos laços em X baseados em x_0 com a topologia compacto-aberta. Se $n \geq 2$, o n-ésimo grupo de homotopia de X com ponto base em x_0 é o $(n$ - 1$)$-ésimo grupo de homotopia de $\Omega(X, x_0)$ em c, onde c é o caminho constante em x_0. Assim,*

$$\pi_2(X, x_0) = \pi_1(\Omega(X, x_0), c), \ldots\, , \ \pi_n(X, x_0) = \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), c).$$

As três definições A (1.1.1), B (1.1.2) e C (1.1.5) de grupos de homotopia de ordem superior são equivalentes. Já discutimos a equivalência de A e B e agora vamos comparar A e C. Esta discussão será para o caso $n = 2$ uma vez que a extensão para valores superiores de n requer um pouco mais do que escrever coordenadas adicionais.

Suponha então que α é um elemento de $F_2(X, x_0)$, isto é, α é uma aplicação contínua do quadrado unitário I^2 em X que leva ∂I^2 em x_0. Então α determina um membro $\hat{\alpha}$ de $\Omega(\Omega(X, x_0), c)$ definido por

$$\hat{\alpha}(t_1)(t_2) = \alpha(t_1, t_2); \quad (t_1, t_2) \in I^2.$$

Cada valor $\hat{\alpha}(t_1)$ é uma aplicação contínua de I em X porque α é contínua. Note que $\hat{\alpha}(t_1)(0) = \hat{\alpha}(t_1)(1) = x_0$ pois $(t_1, 0)$ e $(t_1, 1)$ estão em ∂I^2.

Assim $\hat{\alpha}(t_1) \in \Omega(X, x_0)$ e obviamente $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(1)$ é o laço constante c cujo único valor é x_0. Mas $\hat{\alpha}$ é contínua como aplicação de I em $\Omega(X, x_0)$. Para ver isto, seja $W(K, U)$ um aberto sub-básico em $\Omega(X, x_0)$. Como usualmente, K é compacto em I e U é aberto em X. Seja $t_1 \in \hat{\alpha}^{-1}(W(K, U))$. Então $\hat{\alpha}(t_1)(K) = \alpha(\{t_1\} \times K) \subset U$. Como K é compacto, existe um aberto O em I tal que $t_1 \in O$ e $\alpha(O \times K) \subset U$.

Assim

$$t_1 \in O \subset \hat{\alpha}^{-1}(W(K,U)),$$

logo $\hat{\alpha}^{-1}(W(K,U))$ é um aberto e $\hat{\alpha}$ é contínua. Portanto cada membro de $F_2(X,x_0)$ determina de maneira natural um membro de $\Omega(\Omega(X,x_0),c)$.

Suponha que invertemos o processo e comecemos com um elemento $\hat{\alpha}$ de $\Omega(\Omega(X,x_0),c)$. Então $\hat{\alpha}$ determina uma aplicação $\alpha : I^2 \longrightarrow X$ definida por

$$\alpha(t_1,t_2) = \hat{\alpha}(t_1)(t_2); \quad (t_1,t_2) \in I^2.$$

Pode-se verificar que $\alpha \in F_2(X,x_0)$. Temos então estabelecido uma correspondência biunívoca entre $F_2(X,x_0)$ e $\Omega(\Omega(X,x_0),c)$, $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$. Além disso, temos $[\alpha] = [\beta]$ (em $F_2(X,x_0)/\sim_{x_0}$) se, e somente se, $[\hat{\alpha}] = [\hat{\beta}]$ (em $\pi_1(\Omega(X,x_0),c)$ $= \Omega(\Omega(X,x_0),c)/\sim_{x_0}$) pois se $H : I^2 \times I \longrightarrow X$ é uma homotopia representando a equivalência de α e β como na Definição A (1.1.1), então

$$\hat{H} : I \times I \longrightarrow \Omega(X,x_0); \quad \hat{H}(t_1,s)(t_2) := H(t_1,t_2,s); \quad t_1,t_2,s \in I,$$

é uma homotopia que dá a equivalência dos laços $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$. Invertendo o argumento mostramos que $\hat{\alpha}$ equivalente a $\hat{\beta}$ implica α equivalente a β. Assim existe uma correspondência biunívoca entre classes de homotopias $[\alpha]$ da definição $A(1.1.1)$ e as classes de homotopias $[\hat{\alpha}]$ da definição C (1.1.5). Como a operação $*$ na definição $A(1.1.1)$ é completamente determinada na primeira coordenada, segue que para qualquer $\alpha, \beta \in F_2(X,x_0)$, $[\alpha * \beta]$ corresponde a $[\hat{\alpha} * \hat{\beta}]$, ou seja, $[\widehat{\alpha * \beta}] := [\hat{\alpha} * \hat{\beta}]$, e conseqüentemente que as duas definições de $\pi_2(X,x_0)$ fornecem grupos isomorfos.

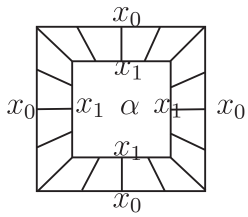
1.2 Propriedades Básicas e Exemplos

A primeira propriedade a ser tratada é relativa a independência do ponto base.

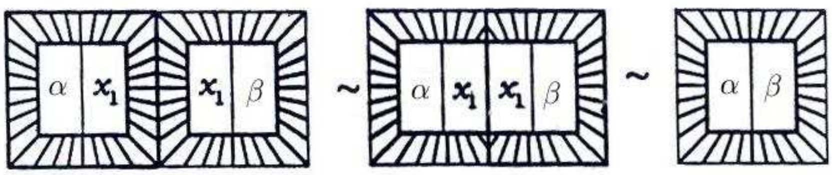
Teorema 1.2.1. *Se o espaço X é conexo por caminhos e x_0 e x_1 são pontos de X, então $\pi_n(X,x_0)$ é isomorfo a $\pi_n(X,x_1)$, para cada $n \geq 1$.*

Demonstração: O caso $n = 1$ está provado na Proposição A.1.3. Verificaremos aqui o caso $n = 2$. Seja $\gamma : I \longrightarrow X$ um caminho com $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Podemos associar a cada aplicação $\alpha : (I^2, \partial I^2) \longrightarrow (X, x_1)$, que representa um elemento $[\alpha] \in \pi_2(X,x_1)$, um elemento $\alpha' : (I^2, \partial I^2) \longrightarrow (X, x_0)$

(que vamos denotar por $\gamma \cdot \alpha$) por diminuir o domínio de α a um quadrado menor, concêntrico em I^2 e então inserir o caminho γ em cada segmento radial na "faixa"entre o bordo do quadrado menor e ∂I^2.



Assim $\gamma \cdot \alpha$ produz claramente um elemento de $\pi_2(X, x_0)$ pois $(\gamma \cdot \alpha)(\partial I^2) = \{x_0\}$. Agora pode-se verificar que se a aplicação γ é homotópica a ρ e α é homotópica a β (por aplicações fixando $\partial I = \{0, 1\}$ e ∂I^2, respectivamente) então $\gamma \cdot \alpha$ é homotópica a $\rho \cdot \beta$ e portanto $[\gamma \cdot \alpha] = [\rho \cdot \beta]$ em $\pi_2(X, x_0)$. Ainda $\gamma \cdot (\alpha * \beta) \sim \gamma \cdot \alpha * \gamma \cdot \beta$. Para ver isso primeiro deformamos α e α' nas aplicações constantes sobre as metades direitas e esquerdas de I^2 , respectivamente, produzindo aplicações que podemos denotar por $\alpha * 0$ e $0 * \beta$. Daí eliminamos progressivamente o pedaço simétrico do meio de $\gamma \cdot (\alpha * 0)$ e $\gamma \cdot (0 * \beta)$ até obter $\gamma \cdot (\alpha * \beta)$:



Uma fórmula explícita para esta homotopia é

$$H((s_1, s_2), t) = \begin{cases} \gamma \cdot (\alpha * 0)((2-t)s_1, s_2), & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \gamma \cdot (0 * \beta)((2-t)s_1 + t - 1, s_2), & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

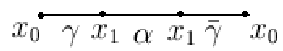
Assim nós temos $\gamma \cdot (\alpha * \beta) \sim \gamma \cdot (\alpha * 0) * \gamma \cdot (0 * \beta) \sim \gamma \cdot \alpha * \gamma \cdot \beta$. Logo temos bem definida uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\gamma : \pi_2(X, x_1) & \longrightarrow & \pi_2(X, x_0) \\ \alpha & \longrightarrow & [\gamma \cdot \alpha] \end{array}$$

que é um homomorfismo pois $\varphi_\gamma([\alpha] \cdot [\beta]) = [\gamma \cdot (\alpha * \beta)] = [\gamma \cdot \alpha * \gamma \cdot \beta] = [\gamma \cdot \alpha] \cdot [\gamma \cdot \beta] = \varphi_\gamma([\alpha]) \cdot \varphi_\gamma([\beta])$.

Ainda, do fato que $(\gamma \cdot \eta) \cdot \alpha \sim \gamma \cdot (\eta \cdot \alpha)$ e $1 \cdot \alpha \sim \alpha$, onde 1 denota o caminho constante, segue que, considerando o caminho reverso $\bar{\gamma}$, $\gamma \cdot (\bar{\gamma} \cdot \alpha) \sim \alpha$ e $\bar{\gamma} \cdot (\gamma \cdot \alpha) \sim \alpha$. Logo φ_γ é um isomorfismo com inverso dado por $\varphi_{\bar{\gamma}}$.

Note que no caso $n = 1$ a representação anterior se reduz a



e a aplicação $\gamma \cdot \alpha$ é o caminho produto $\gamma * \alpha * \bar{\gamma}$ (como usado para provar a independência do ponto base no grupo fundamental). O caso $n > 2$ é similar ao caso $n = 2$, trabalhando com o cubo n-dimensional I^n ao invés do quadrado I^2. ■

Como no caso do grupo fundamental, é usual omitir a referência ao ponto base, quando conveniente, sempre que X for conexo por caminhos.

Proposição 1.2.1. *Sejam X e Y espaços com pontos x_0 em X e y_0 em Y. Então*

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0), \ \ n \geq 1.$$

Demonstração: Sejam p_1 e p_2 as projeções do espaço produto $X \times Y$ em X e Y, respectivamente:

$$\begin{array}{rrcl} p_1 : & X \times Y & \to & X, \\ & (x, y) & \mapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} p_2 : & X \times Y & \to & Y \\ & (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

Todo elemento $[\alpha]$ de $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$, onde

$$\alpha : I^n \longrightarrow X \times Y, \quad \alpha(\partial I^n) = (x_0, y_0),$$

determina elementos $[\alpha_1]$ e $[\alpha_2]$ em $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(Y, y_0)$, respectivamente, onde

$$\alpha_1 = p_1 \circ \alpha : I^n \to X, \qquad \alpha_2 = p_2 \circ \alpha : I^n \to Y$$

pois $\alpha_1(\partial I^n) = p_1(\alpha(\partial I^n)) = p_1(x_0, y_0) = x_0$ e $\alpha_2(\partial I^n) = x_1$.

Inversamente, dados $[\alpha_1] \in \pi_n(X, x_0)$ e $[\alpha_2] \in \pi_n(Y, y_0)$, com

$$\alpha_1 : I^n \to X, \quad \alpha_1(\partial I^n) = x_0 \;\; e \;\; \alpha_2 : I^n \to Y, \quad \alpha_2(\partial I^n) = x_1.$$

Considerando $\alpha : I^n \longrightarrow X \times Y$ definida por $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2)$ temos que α determina um elemento $[\alpha] \in \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$. Então obtemos a aplicação $h : \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0)$ definida por $h([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2]), \;\; [\alpha] \in \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$. Tal aplicação é um isomorfismo entre os grupos.

De fato, h é injetora, pois dados $[\alpha]$ e $[\beta]$ pertencentes à $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$ tais que $h([\alpha]) = h([\beta])$, então $([\alpha_1], [\alpha_2]) = ([\beta_1], [\beta_2])$. Logo $[\alpha_1] = [\beta_1]$ e $[\alpha_2] = [\beta_2]$. Assim, considerando a Definição A (1.1.1) existem homotopias K entre α_1 e β_1 e L entre α_2 e β_2. Tomando $H : I^n \times I \to X \times Y$ definida por $H(t_1, \ldots, t_n, s) = (K(t_1, \ldots, t_n, s), L(t_1, \ldots, t_n, s))$ obtemos uma homotopia entre α e β e assim $[\alpha] = [\beta]$.

Claramente h é sobrejetora pois dado $([\alpha_1], [\alpha_2]) \in \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0)$ existe $[\alpha] = [(\alpha_1, \alpha_2)] \in \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$ tal que $h([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2])$, além disso h é homomorfismo. ■

Mais geralmente, pode-se mostrar:

Proposição 1.2.2. *Para um produto $\prod_\alpha X_\alpha$ de uma coleção qualquer de espaços conexos por caminhos X_α existem isomorfismos $\pi_n(\prod_\alpha X_\alpha) \simeq \prod_\alpha \pi_n(X_\alpha)$ para todo n.*

Demonstração: ([5], Proposição 4.2, p. 343).

Definição 1.2.1. *(Homomorfismo Induzido) Seja $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ uma aplicação contínua sobre os pares indicados. Se $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0), \;\; n \geq 1$, então a composição $f \circ \alpha : I^n \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua que leva ∂I^n em y_0, de modo que $f \circ \alpha$ representa um elemento $[f \circ \alpha]$ em $\pi_n(Y, \; y_0)$. Assim f induz uma aplicação*

$$f_\sharp : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

definida por $f_\sharp([\alpha]) = [f \circ \alpha], \;\; [\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$, que é um homomorfismo. Essa aplicação $f_\sharp$ é chamada homomorfismo induzido por f na dimensão n.

Proposição 1.2.3. a) *Se $f : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ é a aplicação identidade, isto é, $f = id_X$, então $f_\sharp = id_{\pi_n(X, x_0)}$.*

b) *Se* $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ *e* $g : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ *são aplicações contínuas sobre os pares indicados, então o homomorfismo induzido* $(g \circ f)_\sharp$ *é a aplicação composta* $g_\sharp \circ f_\sharp : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Z, z_0)$ *em cada dimensão* n*.*

c) *Se* $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ *é um homeomorfismo então o homomorfismo induzido por* h *é um isomorfismo para cada valor de* n*.*

Demonstração: É similar à dada para o grupo fundamental (Proposição A.3.1). ■

Nesse trabalho os grupos de homotopia do círculo e mais geralmente das esferas, desempenham um papel importante. Assim estudamos a seguir a relação entre os grupos de homotopia de um espaço e de seu recobrimento e como consequência determinamos os grupos de homotopia do círculo. Computamos também, na sequência, os grupos de homotopia "$\pi_i(S^n)$" para $1 \leq i \leq n$. Ressaltamos que os grupos de homotopia "$\pi_i(S^n)$" para $i > n$ não são em geral conhecidos, muitos casos já foram computados e os resultados são surpreendentes. De fato o estudo dos grupos de homotopia das esferas tem levado ao desenvolvimento de muitas ferramentas poderosas usadas em Topologia Algébrica ([5] §4.1, p. 339).

Recordemos que um *recobrimento* do espaço B é um par (E, p) tal que para cada ponto x em B existe um conjunto aberto conexo por caminhos $U \subset B$ tal que $x \in U$ e p aplica cada componente conexa por caminhos de $p^{-1}(U)$ homeomorficamente sobre U. Cada conjunto aberto U é chamado uma *vizinhança admissível* ou *vizinhança elementar*. O espaço B é o *espaço base* e p é a *projeção de recobrimento*. Para maiores detalhes ver [3], capítulo 5.

Teorema 1.2.2. *Seja* $(E,\ p)$ *um espaço de recobrimento de* B *e sejam* e_0 *em* E *e* b_0 *em* B *pontos tais que* $p(e_0) = b_0$*. Então o homomorfismo induzido*

$$p_\sharp : \pi_n(E, e_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0)$$

é um monomorfismo para $n = 1$ *e um isomorfismo para* $n \geq 2$*.*

Demonstração: Considere o caso $n = 1$,

$$p_\sharp : \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0).$$

Como $p_\sharp$ é um homomorfismo basta provar que essa aplicação é injetora. Sejam $[\tilde{\alpha}]$ e $[\tilde{\beta}]$ classes de caminhos em $\pi_1(E, e_0)$, tais que $p_\sharp([\tilde{\alpha}]) = p_\sharp([\tilde{\beta}])$, isto é, $p \circ \tilde{\alpha} \sim p \circ \tilde{\beta}$ então $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$, ou seja, $[\tilde{\alpha}] = [\tilde{\beta}]$ (por [3], Teorema 5.5, p.89). Logo $p_\sharp$ é injetora e portanto um monomorfismo.

Para o caso $n \geq 2$, temos

$$p_\sharp : \pi_n(E, e_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0), \quad n \geq 2.$$

Primeiro vejamos que $p_\sharp$ é sobrejetora. Seja $[\alpha] \in \pi_n(B, b_0)$ e considere α como uma aplicação contínua de $(S^n, \bar{1})$ em (B, b_0), (o símbolo $\bar{1}$ é usado aqui como o ponto base de S^n para evitar confusão com o número 1 que exercerá também um papel importante nesta prova). Como $n \geq 2$, o grupo fundamental $\pi_1(S^n, \bar{1})$ é trivial pois S^n é simplesmente conexo se $n \geq 2$ e conseqüentemente

$$\alpha_\sharp(\pi_1(S^n, \bar{1})) = 0 \subset p_\sharp(\pi_1(E, e_0)),$$

onde $\alpha_\sharp$ é o homomorfismo induzido por α no grupo fundamental. Pelo Teorema do Levantamento ([3] Teorema 5.10, p. 95) α tem um levantamento

$$\tilde{\alpha} : (S^n, \bar{1}) \longrightarrow (E, e_0)$$

tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Então $\tilde{\alpha}$ determina um elemento $[\tilde{\alpha}]$ em $\pi_n(E, e_0)$ para o qual

$$p_\sharp([\tilde{\alpha}]) = [p \circ \tilde{\alpha}] = [\alpha].$$

Logo, $p_\sharp$ é sobrejetora.

Vejamos agora que $p_\sharp$ é injetora. Suponha que $[\beta]$ seja um elemento do kernel de $p_\sharp$, isto é,

$$p_\sharp([\beta]) = [p \circ \beta] = [c]$$

onde c é a aplicação constante $c(S^n) = b_0$. Como ambas $p \circ \beta$ e c vão de $(S^n, \bar{1})$ em (B, b_0) e são equivalentes, então existe uma homotopia $H : S^n \times I \longrightarrow B$ satisfazendo

$$H(t, 0) = (p \circ \beta)(t), \quad H(t, 1) = b_0, \quad t \in S^n, \qquad H(\bar{1}, s) = b_0, \quad s \in I.$$

Agora o grupo fundamental $\pi_1(S^n \times I, (\bar{1}, 0))$ é trivial visto que $n \geq 2$ e assim o Teorema do Levantamento ([3], Teorema 5.3, p. 88) se aplica novamente para mostrar a existência de um levantamento

$$\tilde{H} : S^n \times I \longrightarrow E$$

tal que $p \circ \tilde{H} = H$ e $\tilde{H}(\bar{1}, 0) = e_0$. A homotopia levantada $\tilde{H}$ é uma homotopia entre β e a aplicação constante $d(S^n) = e_0$. Para isto observe primeiro que, $p \circ \tilde{H}(\cdot\ , 0) = H(\cdot\ , 0) = p \circ \beta, \quad \tilde{H}(\bar{1}, 0) = \beta(\bar{1})$.

Uma conseqüência do Teorema do Levantamento ([3], Corolário 5.2, p. 87) garante que $\tilde{H}(\cdot\ , 0) = \beta$ pois S^n é conexo. O mesmo argumento mostra que $\tilde{H}(\cdot\ , 1) = d$. Resta ver que $\tilde{H}(\bar{1}, s) = e_0$ para cada s em I. O caminho $\tilde{H}(\bar{1}, \cdot) : I \longrightarrow E$ tem ponto inicial e_0 e é um levantamento do caminho constante $H(\bar{1},\cdot) = c = b_0$. Como o único levantamento de c que inicia em e_0 é o caminho constante e_0, então $\tilde{H}(\bar{1}, s) = e_0, \quad s \in I$.

Assim $\tilde{H} : S^n \times I \longrightarrow E$ é uma homotopia tal que

$$\tilde{H}(\cdot\ ,0) = \beta, \quad \tilde{H}(\cdot\ ,1) = d, \quad \tilde{H}(\bar{1}, s) = e_0, \quad s \in I,$$

e então $[\beta] = [d]$ é o elemento neutro de $\pi_n(E, e_0)$. Logo o kernel de $p_\sharp$ contém somente o elemento neutro de $\pi_n(E, e_0)$ e portanto $p_\sharp$ é injetora. ■

Exemplo 1.2.1. *Os grupos de homotopia de ordem superior do círculo unitário S^1 são triviais, isto é, $\pi_i(S^1) = 0$ se $i \geq 2$. De fato, considere o espaço de recobrimento universal $(\mathbb{R},\ p)$ do círculo unitário S^1. Pelo teorema anterior $p_\sharp : \pi_i(\mathbb{R}) \longrightarrow \pi_i(S^1)$ é um isomorfismo para $i \geq 2$. Mas todos os grupos de homotopia do espaço contráctil $\mathbb{R}$ são triviais, logo $\pi_i(S^1) = 0$ se $i \geq 2$.*

Para esferas S^n com $n > 1$, o que podemos afirmar é:

Exemplo 1.2.2. *Para $i < n$, o i-ésimo grupo de homotopia $\pi_i(S^n)$ é o grupo trivial. De fato isso será provado no capítulo 2 após falarmos de Aproximação Celular.*

Exemplo 1.2.3. *Para $n \geq 1$, o n-ésimo grupo de homotopia $\pi_n(S^n)$ é isomorfo ao grupo $\mathbf{Z}$ dos inteiros. Notemos que o caso n=1 foi tratado no Apêndice (Proposição A.2.2). Considere $\pi_n(S^n)$, $n \geq 2$, como o conjunto das classes de homotopia das aplicações $\alpha : (S^n, 1) \longrightarrow (S^n, 1)$ como na Definição B (1.1.2). Dessa forma podemos considerar o grau da aplicação α (isto é, o inteiro r tal que $\alpha_n^*([z_n]) = r[z_n]$, onde $\alpha_n^* : H_n(K) \longrightarrow H_n(K)$, K é uma triangulação de S^n e $[z_n]$ é um gerador (classe fundamental) de $H_n(K) \simeq \mathbb{Z}$ ([3], §3.3)). Defina*

$$\rho : \pi_n(S^n) \longrightarrow \mathbf{Z}; \quad \rho([\alpha]) := \text{grau de } \alpha, \quad [\alpha] \in \pi_n(S^n).$$

Observe que esta aplicação está bem definida, isto é, se $\alpha \sim \beta$, com $\alpha, \beta : S^n \longrightarrow S^n$, então grau de α = grau de β ([3], Teorema 3.9, p.52). Agora pode-se mostrar que ρ é injetora, isto é, grau de α = grau de β implica $\alpha \sim \beta$ ([3], Teorema 3.10, p.53). A aplicação identidade $id : (S^n, 1) \longrightarrow (S^n, 1)$ tem grau 1 e a descrição da operação $*$ na Definição B (1.1.2) mostra que a aplicação

$$id^k = id * id * \ldots * id \quad (k \text{ termos})$$

tem grau k. E pode-se verificar que $[id]$ é um gerador de $\pi_n(S^n)$, $\rho([id]^k) = k$ e $\rho([id]^{-k}) = \rho([id^{-k}]) = -k$, para qualquer inteiro positivo k. Concluindo assim que ρ é um isomorfismo.

Como uma consequência do teorema anterior podemos também calcular os grupos de homotopia $\pi_i(\mathbb{R}P^n)$, para $n \geq 2$ e $2 \leq i \leq n$, onde $\mathbb{R}P^n$ indica o espaço projetivo real n-dimensional:

Exemplo 1.2.4. *O espaço projetivo real n-dimensional $\mathbb{R}P^n$, definido como o espaço quociente de S^n pela relação de equivalência que identifica os pontos antipodais $(v \sim -v)$ tem, quando $n \geq 2$, o n-ésimo grupo de homotopia isomorfo ao grupo $\mathbb{Z}$ dos inteiros e $\pi_i(\mathbb{R}P^n) = 0$, se $2 \leq i < n$. Com efeito, considere o recobrimento duplo $(S^n,\ p)$ sobre o n-espaço projetivo $\mathbb{R}P^n$. O teorema anterior implica que $\pi_i(\mathbb{R}P^n) \simeq \pi_i(S^n)$, $2 \leq\ i \leq n$. Agora dos exemplos anteriores, obtemos então $\pi_n(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ e $\pi_i(\mathbb{R}P^n) = 0$, se $2 \leq i < n$, como afirmado. Notemos que $\mathbb{R}P^1$ é homeomorfo a S^1 e assim $\pi_1(\mathbb{R}P^1) \simeq \mathbb{Z}$.*

Nosso objetivo agora é mostrar que os grupos de homotopia $\pi_n(X)$ são abelianos para $n \geq 2$. Para tanto será útil o resultado seguinte.

Teorema 1.2.3. *Seja G um grupo topológico com elemento e. Então $\pi_1(G, e)$ é abeliano.*

Demonstração: Um grupo topológico é um grupo G com uma topologia sob a qual a operação de G é uma aplicação contínua de $G \times G$ em G e a aplicação $g \mapsto g^{-1}$ é um homeomorfismo de G sobre G. A operação em G induz uma operação $\bullet$ sobre $\Omega(G, e)$, o espaço dos laços em G baseados em e, definida por:

$$(\alpha \bullet \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t), \quad \alpha, \beta \in \Omega(G, e), \quad t \in I$$

onde a justaposição de $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ indica seu produto em G. Esta operação também induz uma operação $\diamond$ sobre $\pi_1(G, e)$:

$$[\alpha] \diamond [\beta] = [\alpha \bullet \beta], \quad [\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e).$$

Seja c o laço constante e, e sejam $[\alpha]$ e $[\beta]$ membros de $\pi_1(G, e)$. Observe que

$$(\alpha * c) \bullet (c * \beta)(t) = (\alpha * c)(t) \cdot (c * \beta)(t) =$$

$$= \begin{cases} (\alpha * c)(t) \cdot (c * \beta)(t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\alpha * c)(t) \cdot (c * \beta)(t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha(2t) \cdot c(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c(2t-1) \cdot \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha(2t) \cdot e = \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ e \cdot \beta(2t-1) = \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(c * \alpha) \bullet (\beta * c)(t) = (c * \alpha)(t) \cdot (\beta * c)(t) =$$

$$= \begin{cases} c(2t) \cdot \beta(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1) \cdot c(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e \cdot \beta(2t) = \beta(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1) \cdot e = \alpha(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Isso nos dá que

$$[(\alpha * c) \bullet (c * \beta)] = [\alpha * \beta],$$

$$[(c * \alpha) \bullet (\beta * c)] = [\beta * \alpha].$$

Então

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta] = [(\alpha * c) \bullet (c * \beta)] = [\alpha * c] \diamond [c * \beta] =$$
$$= [c * \alpha] \diamond [\beta * c] = [(c * \alpha) \bullet (\beta * c)] = [\beta * \alpha] = [\beta] \circ [\alpha].$$

Logo $\pi_1(G, e)$ é abeliano. Aqui está um fato curioso e adicional, as operações $\circ$ e $\diamond$ são iguais:

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta] = [(\alpha * c) \bullet (c * \beta)] = [\alpha * c] \diamond [c * \beta] = [\alpha] \diamond [\beta]. \qquad \blacksquare$$

Definição 1.2.2. *Um H-espaço ou espaço de Hopf é um espaço topológico Y com uma multiplicação contínua (indicada pela justaposição) e um ponto y_0 em Y para o qual a aplicação definida pela multiplicação à esquerda por y_0 e a aplicação definida pela multiplicação à direita por y_0 são ambas homotópicas à aplicação identidade sobre Y por homotopias que deixam y_0 fixado. Em outras palavras, existem homotopias L e R de $Y \times I$ em Y tais que:*

$$L(y,0) = y_0 y, \qquad L(y,1) = y, \qquad L(y_0,t) = y_0,$$
$$R(y,0) = y y_0, \qquad R(y,1) = y, \qquad R(y_0,t) = y_0$$

para todo y em Y e t em I. O ponto y_0 é chamado homotopia unitária de Y.

Exemplo 1.2.5. *Todo grupo topológico G é um H-espaço.*

Basta tomar as homotopias de $G \times I$ em G como $L(g,t) = g$ e $R(g,t) = g$.

Exemplo 1.2.6. *Se X é um espaço e x_0 é um ponto de X, então o espaço de laços $\Omega(X, x_0)$ com a topologia compacto-aberta é um H-espaço.*

De fato, a multiplicação é a operação $*$ (justaposição de caminhos), e a homotopia unitária é a aplicação constante c. As requeridas homotopias L e R são definidas para α em $\Omega(X, x_0)$ e s em I por:

$$L(\alpha, s)(t) = \begin{cases} x_0, & \text{se } \ 0 \leq t \leq \frac{(1-s)}{2} \\ \alpha(\frac{2t+s-1}{s+1}), & \text{se } \ \frac{(1-s)}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$R(\alpha, s)(t) = \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{s+1}), & \text{se } \ 0 \leq t \leq \frac{(s+1)}{2} \\ x_0, & \text{se } \ \frac{(s+1)}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Teorema 1.2.4. *Se Y é um H-espaço com homotopia unitária y_0, então $\pi_1(Y, y_0)$ é abeliano.*

Demonstração: A operação multiplicação contínua sobre Y induz uma operação $\bullet$ sobre $\Omega(Y, y_0)$, como no teorema anterior, definida por:

$$(\alpha \bullet \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t), \quad \alpha, \beta \in \Omega(Y, y_0), \quad t \in I.$$

Esta operação também induz uma operação $\diamond$ sobre $\pi_1(Y, y_0)$:

$$[\alpha] \diamond [\beta] = [\alpha \bullet \beta], \quad [\alpha], [\beta] \in \pi_1(Y, y_0).$$

Seja c o laço constante y_0, então

$$(\alpha * c) \bullet (c * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) \cdot y_0, & \text{se } \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y_0 \cdot \beta(2t-1), & \text{se } \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(c * \alpha) \bullet (\beta * c)(t) = \begin{cases} y_0 \cdot \beta(2t), & \text{se } \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1) \cdot y_0, & \text{se } \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como a multiplicação à esquerda por y_0 e a multiplicação à direita por y_0 são ambas homotópicas a aplicação identidade de Y então,

$$[(\alpha * c) \bullet (c * \beta)] = [\alpha * \beta],$$

$$[(c * \alpha) \bullet (\beta * c)] = [\beta * \alpha].$$

Assim, considerando a operação usual $\circ$ em $\pi_1(Y, y_0)$, temos:

$$\begin{aligned}[]
[\alpha] \circ [\beta] &= [\alpha * \beta] = [(\alpha * c) \bullet (c * \beta)] = [\alpha * c] \diamond [c * \beta] = \\
&= [c * \alpha] \diamond [\beta * c] = [(c * \alpha) \bullet (\beta * c)] = [\beta * \alpha] = [\beta] \circ [\alpha].
\end{aligned}$$

Logo $\pi_1(Y, y_0)$ é abeliano. Note que, como na prova do teorema anterior conclui-se que as operações $\circ$ e $\diamond$ são iguais. ■

Teorema 1.2.5. *Os grupos de homotopia de ordem superior $\pi_n(X, x_0), n \geq 2$, de qualquer espaço X, são abelianos.*

Demonstração: Temos que o segundo grupo de homotopia $\pi_2(X, x_0) = \pi_1(\Omega(X, x_0), c)$ e assim é abeliano pois $\Omega(X, x_0)$ é um H-espaço com a constante c como homotopia unitária. Procedendo indutivamente, suponha que o $(n-1)$-ésimo grupo de homotopia $\pi_{n-1}(Y, y_0)$ é abeliano para todo Y. Então, $\pi_n(X, x_0) = \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), c)$ é abeliano, e a prova está completa. ■

Como no caso do grupo fundamental, se $f : X \longrightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia com $f(x_0) = y_0$ então pode-se provar que f induz isomorfismos entre $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(Y, y_0)$ para todo n. Apresentaremos aqui a prova no caso particular em que exigimos que os pares (X, x_0) e (Y, y_0) têm o mesmo tipo de homotopia. Isto torna a prova mais simples ([3], teorema 6.14).

Definição 1.2.3. *Sejam X e Y espaços com pontos x_0 em X e y_0 em Y. Dizemos que os pares (X, x_0) e (Y, y_0) são homotopicamente equivalentes ou têm o mesmo tipo de homotopia, se existem aplicações contínuas $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ para as quais as aplicações compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ são homotópicas às aplicações identidades sobre X e Y, respectivamente, por homotopias que deixam os pontos bases fixados. Em outras palavras, é exigido que existam homotopias $H : X \times I \longrightarrow X$ e $K : Y \times I \longrightarrow Y$ tais que*

$$\begin{aligned}
&H(x,0) = (g \circ f)(x), \quad H(x,1) = x, \quad H(x_0,t) = x_0, \quad x \in X, t \in I, \\
&K(y,0) = (f \circ g)(y), \quad K(y,1) = y, \quad K(y_0,t) = y_0, \quad y \in Y, t \in I.
\end{aligned}$$

A aplicação f é chamada uma equivalência de homotopia com inversa homotópica g.

A prova do próximo resultado é similar à prova da proposição A.3.2.

Proposição 1.2.4. *Equivalência de homotopia entre pares é uma relação de equivalência.*

Teorema 1.2.6. *Se uma aplicação $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ é uma equivalência de homotopia entre os pares indicados, então o homomorfismo induzido $f_\sharp : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$ é um isomorfismo para cada inteiro n.*

Demonstração: Seja $g : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ uma inversa homotópica para f e H uma homotopia entre $g \circ f$ e a aplicação identidade sobre X que deixa x_0 fixo, então

$$\begin{aligned} &H : X \times I \longrightarrow X \\ &H(\cdot, 0) = g \circ f, \\ &H(\cdot, 1) = id_X, \\ &H(x_0, t) = x_0, \qquad t \in I. \end{aligned}$$

Seja $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$, e considere α como uma aplicação de I^n em X tal que $\alpha(\partial I^n) = x_0$. Defina uma homotopia $K : I^n \times I \longrightarrow X$ por

$$K(t, s) = H(\alpha(t), s), \quad t \in I^n, s \in I.$$

Então,

$$K(\cdot, 0) = (g \circ f) \circ \alpha, \quad K(\cdot, 1) = \alpha,$$
$$K(\partial I^n \times I) = H(\{x_0\} \times I) = x_0,$$

assim

$$[(g \circ f) \circ \alpha] = [\alpha].$$

Isto significa que

$$g_\sharp(f_\sharp[\alpha]) = [\alpha],$$

e portanto $g_\sharp$ é uma inversa à esquerda para $f_\sharp$. Como f é uma inversa homotópica para g, concluímos por simetria que $g_\sharp$ é também uma inversa à direita para $f_\sharp$ e então $f_\sharp$ é um isomorfismo. ■

1.3 Grupos de Homotopia Relativa e Sequência Exata Longa

Generalizações muito úteis dos grupos de homotopias $\pi_n(X, x_0)$ são os grupos de homotopia relativa $\pi_n(X, A, x_0)$ para um par (X, A) com um ponto base $x_0 \in A$.

Definição 1.3.1. *Considere I^{n-1} como a face de I^n com a última coordenada $s_n = 0$ e seja J^{n-1} o fecho de $\partial I^n - I^{n-1}$, a união das faces restantes de I^n. Então $\pi_n(X, A, x_0)$ para $n \geq 1$ é definido como sendo o conjunto das classes* *de homotopia de aplicações*

$$\psi : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$$

(isto é, que satisfazem $\psi(\partial I^n) \subset A$ e $\psi(J^{n-1}) = x_0$) com homotopias por intermédio de aplicações da mesma forma, ou seja $[\psi] = [\varphi]$ se existe uma homotopia $H : I^n \times I \longrightarrow X$ satisfazendo $H(u, 0) = \psi(u)$, $H(u, 1) = \varphi(u)$ e para cada t fixo, $H_t(\partial I^n) \subset A$, $H_t(J^{n-1}) = x_0$, onde $H_t(u) := H(u, t)$.

Observação 1.3.1. (*1*) *Podemos ver os grupos de homotopia absoluta como um caso especial dos grupos de homotopia relativa pois $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$.*

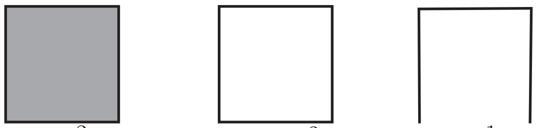
(*2*) *A definição do* conjunto *das classes de homotopia "$\pi_n(X, x_0)$" pode ser dada de modo a incluir o caso $n = 0$ por tomar I^0 como sendo um ponto, que vamos denotar por p, e ∂I^0 o conjunto vazio. Então dado $x_0 \in X$, $\pi_0(X, x_0)$ é exatamente o conjunto das componentes conexas por caminhos de X pois dado $f : I^0 = \{p\} \longrightarrow X$ então $f(p) = \boldsymbol{a} \in X$ e $[f] = \{g : I^0 \longrightarrow X$ para o qual existe um caminho γ ligando $\boldsymbol{a}$ ao ponto $g(p)\}$, visto que $H : I^0 \times I \longrightarrow X$ tal que $H(p, t) = \gamma(t)$ é uma homotopia ($H(p, 0) = \gamma(0) = a = f(p)$, $H(p, 1) = \gamma(1) = g(p)$ e a condição $H(\partial I^0, t) = x_0$ é satisfeita uma vez que $\partial I^0 = \emptyset$). Conseqüentemente, se X é conexo por caminhos então $\pi_0(X, x_0)$ tem um único elemento. Porém não podemos dar à $\pi_0(X, x_0)$ uma estrutura de grupo a não ser quando X é conexo por caminhos que podemos tomar $\pi_0(X, x_0)$ como sendo o grupo trivial.*

(*3*) *A definição 1.3.1 não se estende de maneira natural de modo a incluir o caso $n = 0$. Assim nós deixaremos esse caso sem incluir na definição acima. Uma definição possível é considerar $\pi_0(X, A, x_0) = \pi_0(X, x_0)/\pi_0(A, x_0)$ (vide [5], Cap.4, exercício 9).*

Operações: Uma operação soma é definida em $\pi_n(X, A, x_0)$ da mesma forma como em $\pi_n(X, x_0)$, exceto que agora a coordenada s_n desempenha um papel especial em função da escolha de J^n (e não tem valor para operação soma). Dados $[\alpha]$ e $[\beta]$ em $\pi_n(X, A, x_0)$, $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta]$, onde

$$(\alpha * \beta)(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \ldots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n), & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

Então $\pi_n(X, A, x_0)$ é um grupo para $n \geq 2$, e este grupo é abeliano para $n \geq 3$. Para $n = 1$ temos $I^1 = [0, 1]$, $I^0 = \{0\}$ e $J^0 = \{1\}$, então $\pi_1(X, A, x_0)$ é o conjunto das classes de homotopias de aplicações $\alpha : ([0, 1], \{0\}, \{1\}) \longrightarrow (X, A, x_0)$, isto é, caminhos em X com ponto inicial em um ponto qualquer (variável) de A e ponto final um ponto base fixo $x_0 \in A$. Em geral este não é um grupo de maneira natural. Para $n = 2$, $I^2 = I \times I, I^1 = I \times \{0\}; J^1 = \{0, 1\} \times]0, 1] \cup I \times \{1\}$, e $\pi_2(X, A, x_0) = \{[\alpha];\ \ \alpha : (I^2, \partial I^2, J^1) \longrightarrow (X, A, x_0)\}$.



I^2 $\quad$ ∂I^2 $\quad$ J^1

Observação 1.3.2. (*1*) *Exatamente como elementos de* $\pi_n(X, x_0)$ *podem ser considerados como classes de homotopias de aplicações* $(S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$ (*onde* $S^n = I^n/\partial I^n$ *e* $s_0 = \partial I^n/\partial I^n$), *existe uma definição alternativa de* $\pi_n(X, A, x_0)$ *como o conjunto das classes de homotopias de aplicações* $(D^n,\ S^{n-1},\ s_0) \longrightarrow (X,\ A,\ x_0)$, *pois deformando* J^{n-1} (*que é o fecho de* $\partial I^n - I^{n-1}$) *num ponto que vamos denotar por* s_0 *convertemos* $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$ *em* (D^n, S^{n-1}, s_0). *Deste ponto de vista, a operação do grupo é feita via a aplicação* $c : D^n \longrightarrow D^n \vee D^n$ *deformando* $D^{n-1} \subset D^n$ *em um ponto.*

(*2*) *Até agora usamos, em geral, as letras gregas, como* α *e* β, *para indicar aplicações de* $S^n \longrightarrow X$ *cujas classes* $[\alpha]$, $[\beta]$ *representam elementos dos grupos de homotopia, seguindo a notação de [3] e [7]. No entanto, para [5], os elementos dos grupos de homotopia relativa ou mesmo absoluta são indicados por* $[f]$, $[g]$ *e em muitas ocasiões esta será também a notação usada aqui. Também levando em conta a notação em [5], nos capítulos 2 e 3 é comum o uso das letras* α *e* β *para indicar índices, o que não causa confusão* (*embora entendemos não ser uma notação muito apropriada*).

Uma reformulação útil do que significa para um elemento de $\pi_n(X, A, x_0)$ ser trivial é dada pelo seguinte critério:

Proposição 1.3.1. (*Critério da Compressão*) *Uma aplicação* $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ *representa o zero em* $\pi_n(X, A, x_0)$ *se, e somente se, ela é homotópica relativamente a* S^{n-1} *à uma aplicação com imagem contida em* A.

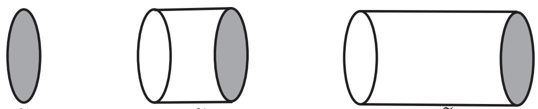
Demonstração: ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $[f] = 0$ em $\pi_n(X, A, x_0)$. Então existe uma homotopia $F : D^n \times I \longrightarrow X$ (entre f e a aplicação constante x_0), satisfazendo $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = x_0$, $\forall x \in D^n$, e para cada $t \in I$, $F(u, t) \in A$, $\forall u \in S^{n-1}$, isto é, $F(S^{n-1} \times I) \subset A$.

Queremos definir uma homotopia $\tilde{F} : D^n \times I \longrightarrow X$, estacionária sobre S^{n-1}, entre f e uma aplicação g, com $Im(g) \subset A$. A idéia é definir a homotopia $\tilde{F}$ através da restrição da F a uma família de n-discos em $D^n \times I$, iniciando em $D^n \times \{0\}$ e terminando em $D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times I$ (todos os discos dessa família tendo o mesmo bordo).

Para tanto considere os discos $\tilde{D}^n_t$, $t \in I$, dados por

$$\tilde{D}^n_t = S^{n-1} \times [0, t] \cup D^n \times \{t\}.$$

Ilustrando no caso $n = 2$.



$\tilde{D}^2_0$ $\tilde{D}^2_t$ $\tilde{D}^2_1$

Note que $\partial \tilde{D}^n_t = S^{n-1} \times \{0\} \subset D^n \times I$, $\forall t$. Restringindo F a essa família de discos e considerando que, para cada t, $D^n \times \{t\}$ é homeomorfo a $\tilde{D}^n_t$ via um homeomorfismo φ_t, com $\varphi_0 = id$ e $\varphi_t(u, t) = (u, 0)$, $\forall u \in S^{n-1} = \partial D^n$, definimos então uma homotopia

$$\tilde{F} : D^n \times I \longrightarrow X; \quad (x, t) \mapsto F(\varphi_t(x, t))$$

tal que

- $\tilde{F}(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in D^n$.
- Para cada t fixo, $t \in [0, 1]$ e $u \in S^{n-1} = \partial D^n$, $\tilde{F}(u, t) = F(\varphi_t(u, t)) = F(u, 0) = f(u) \in A$.
- Tomando $g(x) := \tilde{F}(x, 1)$ temos que $Im(g) \subset A$ pois $Im(g) = \tilde{F}(D^n \times \{1\}) = F(\varphi_1(D^n \times \{1\})) = F(\tilde{D}^n_1) = F(D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times I) \subset A$, porque $F(D^n \times \{1\}) = x_0$ e $F(S^{n-1} \times I) \subset A$.

Assim f é homotópica, por uma homotopia estacionária sobre S^{n-1}, a uma aplicação $g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ cuja imagem está contida em A, como desejado.

($\Longleftarrow$) Suponhamos $f \sim g$ por uma homotopia estacionária sobre S^{n-1}, com $Im(g) \subset A$. Afirmamos que $[g] = 0$ em $\pi_n(X, A, x_0)$. De fato, como D^n é contráctil a s_0, existe uma homotopia $K : D^n \times I \longrightarrow D^n$ tal que $K(x, 0) = x = id_X(x)$ e $K(x, 1) = s_0$. Tomemos a composta

$$\tilde{K} = g \circ K : D^n \times I \xrightarrow{K} D^n \xrightarrow{g} X.$$

Então $\tilde{K}$ é uma homotopia entre g e a aplicação constante x_0 pois $\tilde{K}(x, 0) = g(K(x, 0)) = g(x)$, $\tilde{K}(x, 1) = g(K(x, 1)) = g(s_0) = x_0$, e para todo $u \in S^{n-1}$, $\tilde{K}(u, t) = g(K(u, t)) \in A$, visto que $Im(g) \subset A$. Assim $[f] = [g] = 0$ em $\pi_n(X, A, x_0)$. ■

Homomorfismo Induzido: Como no caso absoluto uma aplicação $\varphi : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$ induz uma aplicação

$$\varphi_\sharp : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$$

que são homomorfismos para $n \geq 2$ e têm propriedades análogas àquelas no caso absoluto: $(\varphi \circ \psi)_\sharp = \varphi_\sharp \circ \psi_\sharp$, $(id_X)_\sharp = id_{\pi_n(X,A,x_0)}$ e $\varphi_\sharp = \psi_\sharp$ se $\varphi \sim \psi$ através de aplicações $(X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$.

Provavelmente a característica mais útil dos grupos de homotopia relativa $\pi_n(X, A, x_0)$ é que eles se encaixam numa seqüência exata longa.

Proposição 1.3.2. *Seja (X,A,B) uma tripla de espaços topológicos e $x_0 \in B \subset A \subset X$. Então a seguinte seqüência é exata:*

$$\cdots \to \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_\sharp} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \to \cdots$$

$$\to \pi_1(X, A, x_0).$$

Em particular, considerando $B = x_0$, podemos concluir que a seqüência para pares (X,A) é exata:

$$\cdots \to \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_\sharp} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \to \cdots \to \pi_0(X, x_0).$$

Demonstração: ([5], Teorema 4.3, p. 344)

Observação 1.3.1. (*1*) *Nas sequências anteriores $i_\sharp$ e $j_\sharp$ são as aplicações induzidas das inclusões naturais* (*de pares*)*.* ***A aplicação ∂, denominada aplicação bordo, vem das aplicações restrições*** $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow$

(X, A, x_0) para I^{n-1}, ou $(D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ para S^{n-1}. Tal aplicação é um homomorfismo quando $n > 1$.

(2) *Próximo ao fim das seqüências, onde estruturas de grupo não estão definidas, a exatidão também é considerada no seguinte sentido: A imagem de uma aplicação é o "kernel" da próxima, onde o kernel é considerado como o conjunto dos elementos que são levados na classe de homotopia da aplicação constante.*

Definição 1.3.2. *Um espaço topológico X com ponto base x_0 é chamado n-conexo se $\pi_i(X, x_0) = 0$ para todo $i \leq n$. Assim espaço 0-conexo significa conexo por caminhos e 1-conexo significa espaço simplesmente conexo. Um par (X, A) é n-conexo se $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ para todo $i \leq n$.*

Observação 1.3.3. (1) *Em espaços n-conexos a escolha do ponto base x_0 não é relevante pois n-conexo implica 0-conexo e assim conexo por caminhos.*

(2) *Notemos que S^n é (n-1)-conexo, como vimos no exemplo 1.2.2.*

(3) *Se $\pi_0(X, A, x_0)$ não foi definido, temos que exigir (na definição de par n-conexo) que $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ para $1 \leq i \leq n$ e que cada componente conexa por caminhos de X contenha pontos de A.*

Capítulo 2

CW-Complexos

2.1 CW-Complexos

Intuitivamente um CW-complexo é um espaço topológico de Hausdorff que admite uma determinada "decomposição celular", através de "células e^n"onde e^n denota uma célula aberta de dimensão n (que é homeomorfa ao disco aberto n-dimensional). Tomamos as zero-células e^0 como pontos (vértices); uma 1-célula e^1 é homeomorfa ao intervalo $]-1, 1[$; uma 2-célula e^2 é homeomorfa ao interior do disco unitário $D^2 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ e assim por diante.

Mais precisamente temos ([8], p. 214):

Definição 2.1.1. *Um CW-complexo é um espaço X e uma coleção de células abertas e^n_α cuja união é X tal que:*

(*1*) *X é Hausdorff.*

(*2*) *Para cada n-célula aberta e^n_α da coleção, existe uma aplicação contínua $\phi_\alpha : D^n \longrightarrow X$ (onde $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \parallel x \parallel \leq 1\}$) que aplica $int(D^n)$ homeomorficamente sobre e^n_α e leva $\partial D^n = S^{n-1}$ numa união finita de células abertas, cada uma de dimensão menor do que n.*

(*3*) *Um conjunto A é fechado em X se $A \bigcap \bar{e}_\alpha$ é fechado em $\bar{e}_\alpha$ para cada α.*

A parte finita da condição (2) foi chamada fecho finito ("closure-finiteness") por J. H. C. Whitehead. A condição (3) expressa o fato que X tem o que ele chamou de topologia fraca ("weak topology") relativa à coleção $\{\bar{e}_\alpha\}$. Estes termos são a origem das letras C e W na frase "CW-complexo".

Observamos que as condições (1) e (2) implicam que ϕ_α leva D^n sobre $\bar{e_\alpha^n}$ e $\partial(D^n)$ sobre $\bar{e_\alpha^n} - e_\alpha^n$. De fato, como ϕ_α é contínua, ϕ_α leva D^n, que é o fecho do $int(D^n)$, no fecho de $\phi_\alpha(int(D^n))$, que é $\bar{e_\alpha^n}$. Como $\phi_\alpha(D^n)$ é compacto, ele é fechado (pois X é Hausdorff); e porque esse conjunto contém e_α^n, também contém $\bar{e_\alpha^n}$. Assim $\phi_\alpha(D^n) = \bar{e_\alpha^n}$. Finalmente, como $\phi_\alpha(\partial D^n)$ é disjunto de e_α^n então é igual $\bar{e_\alpha^n} - e_\alpha^n$.

Notemos também que a recíproca de (3) é satisfeita trivialmente; se A é fechado em X, então $A \bigcap \bar{e_\alpha^n}$ é fechado em $\bar{e_\alpha^n}$ para cada α.

Observação 2.1.1. *(1) A aplicação $\phi_\alpha : D^n \longrightarrow X$ é chamada uma aplicação característica para cada célula e_α^n. Por um abuso de notação é comum usar o símbolo X para referir ambos, o CW-complexo e o espaço adjacente.*

(2) Seja X um CW-complexo, considerando $X^n = \{e^i;\ \ 0 \leq i \leq n\}$, podemos ver $X = \bigcup X^n$. O subconjunto X^n de X é chamado de n-esqueleto de X. Os pontos de X^0 são chamados de vértices ou 0-células.

(3) Um CW-complexo X é dito ser finito ou infinito se o número de células em X é finito ou infinito, respectivamente. Se $X = X^n$ para algum n o CW-complexo é dito de dimensão finita e o menor inteiro n para o qual isso ocorre é chamado a dimensão de X.

(4) Observe que uma aplicação característica $\phi_\alpha : D^n \longrightarrow X$ é uma extensão de uma aplicação $\varphi_\alpha : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$, chamada aplicação de "colagem". Esta φ_α é usada para obter X^n de X^{n-1} "colando" células e_α^n, isto significa que X^n é o espaço quociente da união disjunta $X^{n-1} \coprod_\alpha D_\alpha^n$ de X^{n-1} com a coleção de n-discos D_α^n sob as identificações $x \sim \varphi_\alpha(x)$ para $x \in \partial D_\alpha^n = S^{n-1}$. Então como um conjunto, $X^n = (X^{n-1} \coprod_\alpha e_\alpha^n)/\sim$ onde cada e_α^n é um n-disco aberto.

Definição 2.1.2. *Um subcomplexo de um complexo X é um subespaço fechado $A \subset X$ que é a união de células de X. Como A é fechado a aplicação característica de cada célula em A tem imagem contida em A, e também a imagem da aplicação colagem de cada célula está contida em A, assim A é um CW-complexo. Em particular, cada esqueleto X^n de um complexo celular é um subcomplexo. Um par (X,A) consistindo de um complexo celular X e um subcomplexo A será chamado um par de CW-complexos ou um par CW.*

Exemplo 2.1.1. *Um complexo celular 1-dimensional $X = X^1$ é chamado um grafo na topologia algébrica. Ele consiste de vértices (as 0-células) nos quais arestas (as 1-células) são coladas. Note que os extremos de uma aresta podem ser colados num mesmo vértice.*

Exemplo 2.1.2. *A esfera S^n tem uma estrutura celular (canônica) de um CW-complexo com exatamente duas células, e^0 e e^n, a n-célula é colada pela aplicação constante $S^{n-1} \longrightarrow e^0$. Isto é equivalente a enxergar S^n como o espaço quociente $D^n/\partial D^n$.*

Exemplo 2.1.3. *O toro T^2 admite uma estrutura celular 2-dimensional, com uma 0-célula, duas 1-células e uma 2-célula:*

$$T^2 = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e^2 \qquad .$$

Exemplo 2.1.4. *O espaço projetivo real n-dimensional, denotado por $\mathbb{R}P^n$ é definido como sendo o espaço de todas as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^{n+1}$. Cada tal reta é determinada por um vetor não-nulo em $\mathbb{R}^{n+1}$, único a menos de multiplicação por escalar, e $\mathbb{R}P^n$ é topologizado como o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ sob a relação de equivalência $v \sim \lambda v$ para escalares $\lambda \neq 0$. Podemos restringir para vetores de tamanho 1, então $\mathbb{R}P^n$ é também visto como o espaço quociente $S^n/(v \sim -v)$, a esfera com pontos antipodais identificados (como mencionado no exemplo 1.2.4). Isto é equivalente a dizer que $\mathbb{R}P^n$ é o espaço quociente de um hemisfério D^n com pontos antipodais de ∂D^n identificados. Como ∂D^n com pontos antipodais identificados é exatamente $\mathbb{R}P^{n-1}$, vemos que $\mathbb{R}P^n$ é obtido de $\mathbb{R}P^{n-1}$ pela colagem de uma n-célula, com a projeção quociente $S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ como as aplicações de colagem. Segue por indução sobre n que $\mathbb{R}P^n$ tem uma estrutura celular com uma célula e^i em cada dimensão $i \leq n$:*

$$\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$$

Notemos que $\mathbb{R}P^k$ são subcomplexos de $\mathbb{R}P^n$ para $k \leq n$.
Ainda, como $\mathbb{R}P^n$ é obtido de $\mathbb{R}P^{n-1}$ colando uma n-célula, a união infinita $\mathbb{R}P^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}P^n$ se torna um complexo celular com uma célula em cada dimensão. Podemos também ver $\mathbb{R}P^\infty$ como o espaço de retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.1.5. *O n-espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ é o espaço das retas (complexas) passando pela origem em $\mathbb{C}^{n+1}$, isto é, subespaço de vetores 1-dimensional de $\mathbb{C}^{n+1}$. Como no caso de $\mathbb{R}P^n$, cada reta é determinada por* *um vetor não-nulo em* $\mathbb{C}^{n+1}$, *único a menos de multiplicação por escalar, e* $\mathbb{C}P^n$ *é topologizado como o espaço quociente de* $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ *sob a relação de equivalência* $v \sim \lambda v$ *para* $\lambda \neq 0$. *Equivalentemente, este é o espaço quociente obtido da esfera unitária* $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, *com* $v \sim \lambda v$ *para* $\mid \lambda \mid = 1$. *É também possível obter* $\mathbb{C}P^n$ *como o espaço quociente do disco* D^{2n} *sob as identificações* $v \sim \lambda v$ *para* $v \in \partial D^{2n}$, *da seguinte maneira. Os vetores em* $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *com a última coordenada real e não negativa são precisamente os vetores da forma* $(w, \sqrt{1- \mid w \mid^2}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ *com* $\mid w \mid \leq 1$. *Tais vetores formam o grafo de uma função* $w \mapsto \sqrt{1- \mid w \mid^2}$. *Este é um disco* D^{2n}_{+} *limitado pela esfera* $S^{2n-1} \subset S^{2n+1}$ *consistindo dos vetores* $(w, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ *com* $\mid w \mid = 1$. *Cada vetor em* S^{2n+1} *é equivalente sob identificações* $v \sim \lambda v$ *à um vetor em* D^{2n}_{+}, *e o último vetor é único se sua última coordenada é não-nula. Se a última coordenada é zero, temos exatamente as identificações* $v \sim \lambda v$ *para* $v \in S^{2n-1}$.

Desta descrição de $\mathbb{C}P^n$ *como o espaço quociente do disco* D^{2n}_{+} *sob as identificações* $v \sim \lambda v$ *para* $v \in S^{2n-1}$ *segue que* $\mathbb{C}P^n$ *é obtido de* $\mathbb{C}P^{n-1}$ *pela colagem de uma célula* e^{2n} *via a aplicação quociente* $S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$. *Então por indução sobre* n, *obtemos uma estrutura celular* $\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$ *com células somente nas dimensões pares. Similarmente,* $\mathbb{C}P^\infty$ *tem uma estrutura celular com uma célula em cada dimensão par.*

Observação 2.1.1. *Existem inclusões naturais* $S^0 \subset S^1 \subset \cdots \subset S^n$, *mas estas subesferas não são subcomplexos de* S^n *na sua estrutura celular usual com exatamente duas células. No entanto, podemos dar à* S^n *uma estrutura celular diferente na qual cada uma das subesferas* S^k *é um subcomplexo, olhando cada* S^k *como sendo obtida indutivamente do equador* S^{k-1} *colando duas* k*-células, as componentes de* $S^k - S^{k-1}$. *A esfera de dimensão infinita* $S^\infty = \bigcup_n S^n$ *então se torna um complexo celular também. Note que a aplicação quociente* $S^\infty \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ *que identifica pontos antipodais de* S^∞ *identifica as duas* n*-células de* S^∞ *na única* n*-célula de* $\mathbb{R}P^\infty$.

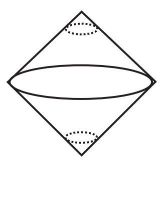
Complexos celulares têm uma boa mistura de rigidez e flexibilidade, com rigidez suficiente para permitir que alguns argumentos procedam numa combinação padrão célula-por-célula e flexibilidade suficiente para permitir que algumas construções naturais sejam executadas sobre eles de modo a obter novos complexos celulares. Aqui estão algumas dessas construções.

Exemplo 2.1.6. ***1.Produto.*** *Se X e Y são CW-complexos então $X \times Y$ tem a estrutura de um CW-complexo tendo como células os produtos $e^m_\alpha \times e^n_\beta$ onde e^m_α percorre todas as células de X e e^n_β percorre todas as células de Y. Por exemplo, a estrutura celular do toro $S^1 \times S^1$ (já descrita) é obtida deste modo considerando a estrutura celular padrão de S^1. No caso geral existe, no entanto, uma pequena complicação: A topologia sobre $X \times Y$ como um CW-complexo é às vezes desprezadamente mais fraca do que a topologia produto, com mais conjuntos abertos do que a topologia produto tem, embora as duas topologias coincidam se X ou Y tem um número finito de células ou ambos X e Y têm uma quantidade enumerável de células.*

2.Quocientes. *Se (X, A) é um par CW consistindo de um CW-complexo X e um subcomplexo A, então o espaço quociente X/A herda uma estrutura celular natural de X. As células X/A são as células de $X - A$ mais uma nova 0-célula, a imagem de A em X/A. Para cada célula e^n_α de $X - A$ colada por $\varphi_\alpha : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$, a aplicação colagem para a correspondente célula em X/A é a composição $S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}/A^{n-1}$.*

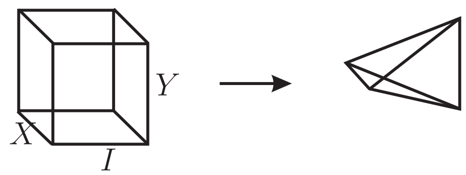
Por exemplo, se damos a S^{n-1} qualquer estrutura celular e construímos D^n de S^{n-1} colando uma n-célula, então o quociente D^n/S^{n-1} é S^n com sua estrutura celular usual. Um outro exemplo, tome X como uma superfície orientável fechada com a estrutura celular tendo uma única 2-célula, e seja A o complementar dessa 2-célula (o 1-esqueleto de X). Então X/A tem uma estrutura celular consistindo de uma 0-célula com uma 2-célula colada, e existe somente uma maneira de colar uma 2-célula à uma 0-célula, pela aplicação constante. Assim X/A é S^2.

3.Suspensão. *Para um espaço X, a* suspensão *SX é o quociente de $X \times I$ obtido pela deformação de $X \times \{0\}$ a um ponto e $X \times \{1\}$ a outro ponto. O exemplo motivador é $X = S^n$, onde $SX = S^{n+1}$ com os dois "pontos de suspensão"no pólo norte e sul de S^{n+1}, os pontos $(0, 0, \ldots, \pm 1)$. Podemos considerar SX como um cone duplo sobre X, a união das duas cópias do cone $CX = (X \times I)/(X \times \{0\})$.*



Se X é um CW-complexo, então também são SX e CX visto como quocientes de $X \times I$ com a estrutura celular produto, sendo dado a I a estrutura celular padrão de duas 0-células unidas por uma 1-célula. Uma propriedade especialmente útil de suspensão é que não somente espaços mas também aplicações podem ser suspensas. Isto é, uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ suspende para $Sf : SX \longrightarrow SY$, a aplicação quociente de $f \times id_I : X \times I \longrightarrow Y \times I$.

4.Join (Junção). *O cone CX é a união de todos os segmentos de retas ligando pontos de X a um vértice externo, e similarmente a suspensão SX é a união de todos os segmentos de retas ligando pontos de X a dois vértices externos. Mais geralmente, dados X e um segundo espaço Y, pode-se definir o espaço de todos segmentos de retas ligando pontos de X a pontos de Y. Isto é, o join (junção) $X * Y$ é o espaço quociente de $X \times Y \times I$ sob as identificações $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$ e $(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$. Assim estamos deformando o subespaço $X \times Y \times \{0\}$ em X e $X \times Y \times \{1\}$ em Y. Por exemplo, se X e Y são ambos intervalos fechados, estamos deformando as duas faces opostas de um cubo sobre segmentos de retas de modo que o cubo se torna um tetraedro.*

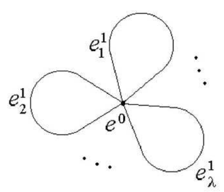


No caso geral, $X * Y$ contém cópias de X e Y e seus dois "extremos", e todos os outros pontos (x, y, t) em $X * Y$ estão sobre um único segmento de reta colando o ponto $x \in X \subset X * Y$ ao ponto $y \in Y \subset X * Y$, o segmento obtido por fixar x e y e considerar a coordenada t em (x, y, t) variando. Uma boa maneira para escrever as coordenadas de $X * Y$ é como uma combinação linear formal $t_1 x + t_2 y$ com $0 \leq t_i \leq 1$ e $t_1 + t_2 = 1$, submetendo as regras $0x + 1y = y$ e $1x + 0y = x$ que correspondem exatamente às identificações na definição de $X * Y$. Da mesma forma um join iterado $X_1 * \cdots * X_n$ pode ser considerado como o espaço de combinações lineares formais $t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n$ com $0 \leq t_i \leq 1$ e $t_1 + \cdots + t_n = 1$ com a convenção que os termos $0 \cdot t_i$ podem ser omitidos. Deste ponto de vista é fácil ver que a operação join é associativa. Um caso especial que desempenha um papel central na topologia algébrica é quando cada X_i é somente um ponto. Por exemplo, o join de dois pontos é um segmento de reta, o join de três pontos é um triângulo, e o join de quatro pontos é um tetraedro. O join de n pontos é um poliedro *convexo de dimensão $n-1$ chamado um simplexo. Concretamente, se os n pontos são os n vetores básicos padrão para $\mathbb{R}^n$, então seus joins é o espaço $\triangle^{n-1} = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n; \quad t_1 + \ldots + t_n = 1, \quad t_i \geq 0\}$.*

Se X e Y são CW-complexos, então existe uma estrutura celular natural sobre $X * Y$ tendo os subespaços X e Y como subcomplexos, com as células restantes sendo o produto celular de $X \times Y \times (0,1)$.

5.Soma Wedge. *Esta é uma operação trivial mas ainda muito útil. Dados espaços X e Y com pontos escolhidos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, então a* soma wedge *$X \vee Y$ é o quociente da união disjunta $X \coprod Y$ obtido pela identificação de x_0 e y_0 em um único ponto. Por exemplo, $S^1 \vee S^1$ é homeomorfo a figura "8", dois círculos se tocando num ponto. Mais geralmente, podemos formar a soma wedge $\bigvee_\alpha X_\alpha$ de uma coleção arbitrária de espaços X_α começando com a união disjunta $\coprod_\alpha X_\alpha$ e identificando pontos $x_\alpha \in X_\alpha$ em um único ponto. No caso dos espaços X_α serem CW-complexos e os pontos x_α serem 0-células, então $\bigvee_\alpha X_\alpha$ é um CW-complexo pois ele é obtido do CW-complexo $\coprod_\alpha X_\alpha$ deformando um subcomplexo num ponto.*

Em particular temos o ***bouquet de n-esferas:*** *$X = \bigvee_{\lambda \in A} S^n_\lambda$, que tem uma estrutura de CW-complexo n-dimensional, com uma única 0-célula, e^0, e uma n-célula, e^n_λ , para cada elemento λ de A. Em especial, o bouquet de círculos $X = \bigvee_{\lambda \in A} S^1_\lambda$ é um CW-complexo 1-dimensional.*



Notemos que para qualquer CW-complexo X, ***o quociente*** *X^n/X^{n-1} é* ***uma soma wedge de*** ***n-esferas*** *$\bigvee_\alpha X_\alpha$ com uma esfera para cada n-célula de X.*

6.Produto Smash. *Sobre um espaço produto $X \times Y$ existem cópias de X e Y, a saber $X \times \{y_0\}$ e $\{x_0\} \times Y$ para pontos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Estas duas cópias de X e Y em $X \times Y$ se interceptam somente no ponto (x_0, y_0), assim a união delas pode ser identificada com a soma wedge de $X \vee Y$. O produto smash $X \wedge Y$ é então definido como o quociente $X \times Y / X \vee Y$.*

O produto smash $X \wedge Y$ é um CW-complexo se X e Y são CW-complexos com x_0 e y_0 como 0-células, assumindo que atribuímos a $X \times Y$ a topologia *de CW-complexo preferencialmente à topologia produto nos casos onde essas duas topologias diferem. Por exemplo, $S^m \wedge S^n$ tem uma estrutura celular com somente duas células de dimensão 0 e $m+n$, conseqüentemente $S^m \wedge S^n = S^{m+n}$. Em particular, quando $m = n = 1$ vemos que deformando círculos longitudinais e meridionais de um toro em um ponto produzimos uma 2-esfera, isto é, $S^1 \wedge S^1 = T/(S^1 \vee S^1) = S^2$.*

É interessante observar que o espaço de recobrimento de um CW-complexo conexo é também um CW-complexo, mais precisamente:

Proposição 2.1.1. *Seja X um espaço topológico conexo com estrutura de CW-complexo. Considere $\tilde{X}$ seu espaço de recobrimento e $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ a projeção associada. Então $\tilde{X}$ pode ser representado como um CW-complexo de tal maneira que toda célula de $\tilde{X}$ será aplicada pela p topologicamente sobre uma célula de X ([10], §6.9, Teorema 2, p. 251).*

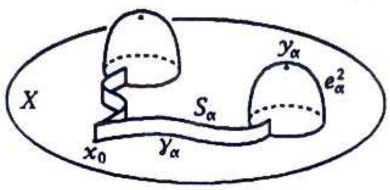
2.2 Grupo Fundamental e Adjunção de 2 - Células

Nesta seção estamos interessados em CW-complexos 2-dimensionais, analisando como o grupo fundamental é afetado por colar 2-células. Seja X^* um espaço de Hausdorff, obtido de um espaço conexo por caminhos X pela adjunção (ou colagem) de uma coleção de 2-células abertas. Nosso principal objetivo é determinar a relação entre o grupo fundamental de X e de X^*. Para este propósito, suponhamos que colamos uma coleção de 2-células e^2_α, $\alpha \in \Lambda$, a um espaço conexo por caminhos X via aplicações de colagem $\varphi_\alpha : S^1 \longrightarrow X$, produzindo um espaço X^*. Se s_0 é um ponto base de S^1 (que podemos supor igual a 1), então φ_α determina um laço baseado em $\varphi_\alpha(s_0)$ (mesmo pensando em laços tecnicamente como aplicações $I \longrightarrow X$ mais do que $S^1 \longrightarrow X$). Vamos denotar tal laço por φ_α. Para diferentes $\alpha' s$ os pontos bases $\varphi_\alpha(s_0)$ desses laços φ_α podem não coincidir (podemos ter $\varphi_{\alpha_1}(s_0) \neq \varphi_{\alpha_2}(s_0)$, se $\alpha_1 \neq \alpha_2$). Para corrigir isso, escolha um ponto base x_0 em X e um caminho γ_α em X ligando x_0 a $\varphi_\alpha(s_0)$, para cada α. Então o produto de caminhos $\gamma_\alpha * \varphi_\alpha * \bar{\gamma_\alpha}$, onde $\bar{\gamma_\alpha}$ indica o caminho reverso de γ_α, é um laço em x_0. Este laço pode não ser homotopicamente nulo em X (i.é, homotópico à um laço constante), mas certamente será homotopicamente nulo após a célula e^2_α ser colada.

Assim o subgrupo normal $N \subset \pi_1(X, x_0)$ gerado pela classe dos laços $\gamma_\alpha * \varphi_\alpha * \bar{\gamma_\alpha}$ com α variando em Λ, está contido no núcleo do homomorfismo $\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X^*, x_0)$ induzido da inclusão $X \hookrightarrow X^*$.

Proposição 2.2.1. *Seja X^* o espaço obtido de X por adjunção (colagem) de uma coleção de 2-células e^2_α, $\alpha \in \Lambda$, como acima. Então a inclusão $X \hookrightarrow X^*$ induz um homomorfismo sobrejetor $\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X^*, x_0)$, cujo núcleo é N. Assim $\pi_1(X^*) \simeq \pi_1(X)/N$.*

Demonstração: Vamos expandir X^* para um espaço Z um pouco mais amplo que se retrai por deformação sobre X^* e é mais conveniente para aplicar o Teorema de Van Kampen. O espaço Z é obtido por colar faixas retangulares $S_\alpha = I \times I$ com a aresta inferior $I \times \{0\}$ colada ao longo de γ_α, a aresta superior $\{1\} \times I$ colada ao longo de um arco em e^2_α, e todas as arestas da esquerda $\{0\} \times I$ das diferentes faixas são identificadas juntas. As arestas do topo das faixas não são coladas a nada (são deixadas livres), e isso permite-nos retrair Z sobre X^*. Assim $\pi_1(Z)$ é isomorfo a $\pi_1(X^*)$. Em cada célula e^2_α escolha um ponto y_α (que não pertence ao arco dos quais a faixa S_α foi colada).



Seja $U = Z - \bigcup_{\alpha\in\Lambda}\{y_\alpha\}$, então U retrai por deformação sobre X. Seja agora $V = Z - X$ ("as faixas unidas com as células"). Note que podemos escolher os caminhos $\gamma_\alpha * \varphi_\alpha * \bar{\gamma_\alpha}$, $\alpha \in \Lambda$ de modo que V seja contráctil (e assim $\pi_1(V) = 0$) pois se os caminhos γ_α's são como na figura acima (isto é, não se interceptam) isso ocorre; agora se, por exemplo, dois caminhos γ_α e γ_β têm um ponto x_1 em comum podemos manter o caminho γ_α e substitur γ_β pelo caminho produto $\tilde{\gamma_\alpha} * \tilde{\gamma_\beta}$ onde $\tilde{\gamma_\alpha}$ é a parte do caminho γ_α que vai de x_0 a x_1 e $\tilde{\gamma_\beta}$ é a parte do caminho γ_β que vai de x_1 a $\varphi_\beta(s_0)$ (repetindo esse procedimento para outro pontos em comum, se necessário). Desse modo o Teorema de Van Kampen aplicado à cobertura $\{U, V\}$ de Z diz que a aplicação induzida da inclusão $\pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(Z)$ (que é isomorfo a $\pi_1(X^*)$) é um epimorfismo cujo núcleo é o subgrupo normal gerado pela imagem da aplicação $\pi_1(U \bigcap V) \longrightarrow \pi_1(U)$.

Considerando que $\pi_1(X) \simeq \pi_1(U)$, resta somente ver que $\pi_1(U \bigcap V)$ é gerado pelas classes dos laços $\gamma_\alpha * \varphi_\alpha * \bar{\gamma_\alpha}$, ou melhor, laços em $U \bigcap V$ cuja imagem em $\pi_1(U)$ (através da aplicação induzida da inclusão) são homotópicos a esse laços. Isto pode ser obtido como uma outra aplicação do Teorema de Van Kampen. Note que $U \cap V$ tem o mesmo tipo de homotopia que o bouquet de círculos $\bigvee_{\alpha \in \Lambda} S^1_\alpha$. Considere a cobertura $\{U_\alpha; \quad \alpha \in \Lambda\}$ de $U \bigcap V$, onde cada $U_\alpha = U \bigcap V - \bigcup_{\beta \neq \alpha}(e^2_\beta - \{y_\beta\})$. Observe que U_α retrai por deformação sobre um círculo em $e^2_\alpha - \{y_\alpha\}$. Assim, $\pi_1(U_\alpha) \simeq \mathbb{Z}$ é gerado (desconsiderando ponto base) pela classe de um laço que dá uma volta em torno de y_α e a imagem desse laço em $\pi_1(U \bigcap V)$ é homotópico a um laço cuja imagem em $\pi_1(U)$ é homotópico ao laço $\gamma_\alpha * \varphi_\alpha * \bar{\gamma_\alpha}$ (que pertence a X), e o resultado segue.

■

Corolário 2.2.1. *Dado um grupo G qualquer, existe um CW-complexo 2-dimensional Y, conexo por caminhos, tal que $\pi_1(Y)$ é isomorfo a G. Se G tem uma apresentação com um número finito de geradores e relações então podemos obter Y compacto.*

Demonstração: Escolha uma apresentação de G, $G = \langle \mathbf{A}; \mathbf{B} \rangle$, ou seja, $G \simeq F/R$, onde F é livre gerado por $\mathbf{A}$ e R é o menor subgrupo normal de F gerado por $\mathbf{B}$ (conjunto de relações). Tome $X^1 = \bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S^1_\alpha$, o bouquet de círculos. Temos que X^1 é conexo e $\pi_1(X^1) \simeq F \simeq *_{\alpha \in \mathbf{A}} \mathbb{Z}_\alpha$ (Exemplo A.4.9). Para cada $\beta \in \mathbf{B}$, escolhemos uma aplicação $g_\beta : S^1_\beta \longrightarrow \bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S^1_\alpha = X^1$, tal que $[g_\beta] = \beta \in \mathbf{B} \subset F$ e usamos esta aplicação para colar uma 2-célula e^2_β a X^1. Mais precisamente, cole a célula e^2_β de modo que a aplicação característica $\phi_\beta : D^2_\beta \longrightarrow X$ leve U^2, o interior do disco D^2, homeomorficamente sobre e^2_β e a restrição $\phi|_{\partial D^2_\beta = S^1_\beta} = g_\beta$. Seja então $X^2 = X^1 \bigcup (\bigcup_{\beta \in \mathbf{B}} e^2_\beta)$. Temos que $X^* = X^2$ e $X = X^1$ satisfazem as hipóteses da proposição anterior. Então $\pi_1(X^2) \simeq \pi_1(X^1)/R \simeq F/R \simeq G$, como desejado. Agora se G tem uma apresentação $G = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s \rangle$ então $Y = (\bigvee_{j=1}^{n} S^1_{\alpha_j}) \cup (\bigcup_{i=1}^{s} e^2_{\beta_i}) = (\bigvee_{j=1}^{n} S^1_{\alpha_j}) \cup (\bigcup_{i=1}^{s} \bar{e}^2_{\beta_i})$, que é compacto. ■

Observação 2.2.1. *A prova da Proposição anterior está de acordo com [5] mas também pode ser encontrada em [7] (Teorema 2.1, p. 213). Quando*

X^* é obtido de X por colar células de dimensões maiores que 2, obtemos um isomorfismo, como mostra o resultado seguinte:

Teorema 2.2.1. *Se X^* é obtido do espaço X pela adjunção de células de dimensão n, $n > 2$, então a aplicação inclusão de X em X^* induz um isomorfismo de $\pi_1(X)$ sobre $\pi_1(X^*)$.*

Demonstração: ([7], Teorema 3.1, p. 214). ■

Usando esses resultados podemos provar que o grupo fundamental de um CW-complexo só depende do 2-esqueleto. Para tanto apresentamos primeiramente o conceito de limite direto de um grupo ([9] §1.4, p. 22) e um lema.

Definição 2.2.1. (*Limite Direto de Grupos*) *Sejam G_α uma família de grupos indexada por algum conjunto de índices parcialmente ordenado $\mathbb{I}$ tendo a propriedade que para cada par $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$ existe $\gamma \in \mathbb{I}$ com $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$. Tal $\mathbb{I}$ é chamado um conjunto direto. Suponha que para cada par $\alpha \leq \beta$ tem-se um homomorfismo $f_{\alpha\beta} : G_\alpha \longrightarrow G_\beta$, tal que $f_{\alpha\alpha} = id_{G_\alpha}$ para cada α, e se $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ então $f_{\alpha\gamma}$ é a composição de $f_{\alpha\beta}$ com $f_{\beta\gamma}$. O conjunto $\{G_\alpha,\ f_{\alpha\beta},\ \alpha \leq \beta,\ \alpha$ e β em $\mathbb{I}\}$, de grupos e homomorfismos é chamado um sistema direto de grupos. A partir desse sistema de grupos podemos definir um grupo, denominado "limite direto" e denotado por "$\varinjlim G_\alpha$" da seguinte maneira: Defina uma relação de equivalência sobre o conjunto $\coprod_\alpha G_\alpha$ por $a \sim b$ se $f_{\alpha\gamma}(a) = f_{\beta\gamma}(b)$ para algum γ, onde $a \in G_\alpha$ e $b \in G_\beta$. (Aqui estamos supondo que tal conjunto seja formado por grupos disjuntos, visto que podemos substituir G_α por uma cópia isomorfa). Esta relação é claramente reflexiva e simétrica, e a transitiva segue da propriedade de conjunto direto. Tal relação pode também ser descrita como a relação de equivalência gerada pelo conjunto $a \sim f_{\alpha\beta}(a)$. Quaisquer duas classes de equivalência $[a]$ e $[b]$ tem representantes a' e b' pertencentes ao mesmo G_γ, assim defina $[a].[b] = [a'.b']$. Pode-se checar que essa operação está bem definida e dá uma estrutura de grupo ao conjunto das classes de equivalência. Tal grupo é que denotamos por $\varinjlim G_\alpha$.*

Observação 2.2.2. (*1*) *Se os grupos G_α são todos abelianos então $\varinjlim G_\alpha$ é isormorfo ao grupo quociente da soma direta $\oplus_\alpha G_\alpha$ pelo subgrupo H gerado pelos elementos da forma $a - f_{\alpha\beta}(a)$ para $a \in G_\alpha$, onde vemos cada G_α como um subgrupo de $\oplus_\alpha G_\alpha$. A aplicação que associa cada* *classe de equivalência $[a]$ à classe lateral de a, aH, é um homomorfismo de $\varinjlim G_\alpha$ no grupo quociente $\coprod_\alpha G_\alpha/H$, com inversa induzida pela aplicação $\sum_i a_i \mapsto \sum_i [a_i]$, para $a_i \in G_{\alpha_i}$ ([5] Seção 3.3, p. 243).*

(2) *Uma situação interessante é quando $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ (ou um subconjunto qualquer de $\mathbb{Z}$), os grupos G_n, $n \in \mathbb{N}$ são encaixantes e os homomorfismos $f_{mn} : G_m \longrightarrow G_n$, para $m \leq n$, são as inclusões.*

Lema 2.2.1. *Seja X um espaço topológico, e para cada inteiro n seja X_n um subespaço de X, conexo por caminhos, contendo o ponto base x_0 de X. Assuma que os subespaços X_n são encaixantes, isto é, $X_n \subset X_{n+1}$ para todo n, que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, e que para todo subconjunto compacto A de X existe um inteiro n tal que $A \subset X_n$. Sejam $i_n : \pi_1(X_n) \longrightarrow \pi_1(X)$ e $j_{m,n} : \pi_1(X_m) \longrightarrow \pi_1(X_n)$, $m \leq n$, homomorfismos induzidos pela inclusão. Então:*

a) *Para todo $\alpha \in \pi_1(X)$, existe um inteiro n e um elemento $\alpha' \in \pi_1(X_n)$ tal que $i_n(\alpha') = \alpha$.*

b) *Se $\beta \in \pi_1(X_m)$ e $i_m(\beta) = 1$, então existe um inteiro $n \geq m$ tal que $j_{m,n}(\beta) = 1$.*

c) *Se os homomorfismos $j_{n,n+1}$ são monomorfismos, para todo n, então cada i_n é também um monomorfismo e $\pi_1(X)$ é a união dos subgrupos $i_n(\pi_1(X_n))$.*

Demonstração: ([7], Exercício II, 4.11, p. 67). ∎

Observação 2.2.3. *: O resultado anterior nos diz que, nas hipóteses acima, $\pi_1(X)$ é o limite direto da sequência de grupos $\pi_1(X_n)$ e homomorfismos $j_{m,n}$.*

Teorema 2.2.2. *Seja X um CW-complexo conexo. A aplicação inclusão do 2-esqueleto X^2 em X induz um isomorfismo de $\pi_1(X^2)$ em $\pi_1(X)$.*

Demonstração: Considere a sequência de subespaços de X: $X_2 = X^2$, o 2-esqueleto de X, $X_3 = X^3$, o 3- esqueleto, e assim por diante, isto é, $X_n = X^n$. Temos que $X_n \subset X_{n+1}$ e $X = \bigcup_{n=2}^{\infty} X_n$. Do Teorema 2.2.1 obtemos que $j_{n,n+1} : \pi_1(X^n) \longrightarrow \pi_1(X^{n+1})$ são isomorfismos para $n \geq 2$. Assim, são monomorfismos, e pelo lema anterior, $i_n : \pi_1(X^n) \longrightarrow \pi_1(X)$ são também monomorfismos e $\pi_1(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} i_n(\pi_1(X^n))$. Além disso, da sobrejetividade, segue que $j_{n,n+1}(\pi_1(X^n)) = \pi_1(X^{n+1})$, para $n \geq 2$. Como o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X^n) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "j_{n,n+1}"'] & \pi_1(X) \\
\pi_1(X^{n+1}) \arrow[ur, "i_{n+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo, temos que $i_{n+1}(j_{n,n+1}(\pi_1(X^n))) = i_n(\pi_1(X^n))$. Logo, da sobrejetividade e, comutatividade do diagrama, obtemos que

$$i_3(\pi_1(X^3)) = i_3(j_{2,3}\ (\pi_1(X^2)) = i_2(\pi_1(X^2)).$$

Também $i_4(\pi_1(X^4)) = i_4(j_{3,4}(\pi_1(X^3)) = i_3(\pi_1(X^3)) = i_2(\pi_1(X^2))$.
Prosseguindo assim temos:
$i_{n+1}(\pi_1(X^{n+1})) = i_{n+1}(j_{n,n+1}(\pi_1(X^n)) = i_n(\pi_1(X^n)) = i_{n-1}(\pi_1(X^{n-1})) = \ldots$ $= i_2(\pi_1(X^2))$. Logo $\pi_1(X) = \bigcup_{n=2}^{\infty} i_n(\pi_1(X^n)) = i_2(\pi_1(X^2))$. Assim i_2 é sobrejetora. Portanto i_2 é isomorfismo de $\pi_1(X^2)$ em $\pi_1(X)$. ∎

2.3 Aproximação Celular e Torre de Postnikov

O objetivo principal dessa seção é apresentar alguns importantes resultados relativos a CW complexos, com destaque para *Aproximação Celular para Pares*, o que nos dá como consequência, sob certas hipóteses, uma condição suficiente para um par de CW-complexos (X, A) ser n-conexo. A seguir computamos o grupo de homotopia no nível n, $n \geq 2$, de um bouquet de n- esferas, finalizando com o Teorema da Torre de Postnikov, que é fundamental na prova da existência de $K(G, n)$- espaços. Outros conceitos e resultados como Propriedade de Extensão de Homotopia e o Teorema de Whitehead são também apresentados.

Propriedade de Extensão de Homotopia: Um fato interessante é que todo par CW, (X, A), tem a propriedade de extensão de homotopia. Tornaremos isso mais preciso a seguir:

Definição 2.3.1. *Um par (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia* *se toda aplicação* $H : X\times\{0\}\cup A\times I \longrightarrow Y$ *pode ser estendida a uma aplicação* $\tilde{H} : X \times I \longrightarrow Y$.

Notemos que dizer que (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia é equivalente a dizer que para qualquer aplicação $f_0 : X \longrightarrow Y$ e homotopia $H : A\times I \longrightarrow Y$ de $f_0 \mid_A$ podemos estender H a uma homotopia $\tilde{H} : X\times I \longrightarrow Y$ de forma que $\tilde{H}(x, 0) = f_0 : X \longrightarrow Y$.

Proposição 2.3.1. (*1*) *Se (X,A) é um par CW, então* $X \times \{0\} \cup A \times I$ *é um retrato por deformação de* $X \times I$ *e consequentemente (X,A) tem a propriedade de extensão de homotopia.*

(*2*) *Se o par* (X, A) *satisfaz a propriedade de extensão de homotopia e A é contráctil, então a aplicação quociente* $q : X \longrightarrow X/A$ *é uma equivalência de homotopia.*

Demonstração: ([5] Proposições 0.16 e 0.17, p.15 e 16). ■

Uma vez que CW complexos são construídos usando aplicações de colagem cujo domínio são esferas, é de se esperar que os grupos de homotopia de CW - complexos carreguem um grande número de informações. O Teorema de Whitehead torna isso explícito:

Teorema 2.3.1. (***Teorema de Whitehead***)
Se uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ *entre CW-complexos conexos induz isomorfismos* $f_\sharp : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$ *para todo n, então f é uma equivalência de homotopia. No caso em que f é a inclusão de um subcomplexo* $X \hookrightarrow Y$*, a conclusão é mais forte: X é um retrato por deformação de Y.*

Demonstração: ([5], Teorema 4.5, p. 346).

Ressaltamos que para a prova do Teorema de Whitehead usa-se o seguinte resultado (técnico) conhecido como Lema da Compressão:

Lema 2.3.1. (*Lema da Compressão*) *Sejam* (X, A) *um par CW e* (Y, B) *um par qualquer com* $B \neq \emptyset$*. Para cada n tal que* $X - A$ *tem células de dimensão n, assuma que* $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ *para todo* $y_0 \in B$*. Então toda aplicação* $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ *é homotópica, relativamente a A, a uma aplicação de X em B. Quando* $n = 0$*, a condição que* $\pi_0(Y,\ B,\ y_0) = 0$ *para todo* $y_0 \in B$ *é para ser entendida como sendo o par* (Y, B) *0-conexo.*

Demonstração: ([5] Lema 4.6, p. 346).

Observação 2.3.1. (*1*) *O Teorema de Whitehead não diz que dois CW - complexos X e Y com grupos de homotopia isomorfos são equivalentes por homotopia, pois há uma grande diferença entre dizer que X e Y têm grupos de homotopia isomorfos e dizer que existe uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ que induz isomorfismos sobre todos os grupos de homotopia. Por exemplo, considerando $X = \mathbb{R}P^2$ e $Y = S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$ tem-se que $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}_2 \simeq \pi_1(Y)$, e usando o fato que o recobrimento universal de X e Y são, respectivamente, S^2 e $S^2 \times S^\infty$, que S^∞ é contráctil e que a projeção de recobrimento induz isomorfismos nos grupos de homotopia, para $j \geq 2$, obtém-se que $\pi_j(\mathbb{R}P^2) \simeq \pi_j(S^2) \simeq \pi_j(S^2 \times S^\infty) \simeq \pi_j(S^2 \times \mathbb{R}P^\infty)$, se $j \geq 2$. Mas $\mathbb{R}P^2$ e $S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$ não têm o mesmo tipo de homotopia visto que seus grupos de homologia são diferentes: $S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$ tem homologia não nula em um número infinito de dimensões pois ele retrai sobre $\mathbb{R}P^\infty$ ([5], capítulo 4, p. 348).*

(*2*) *Um caso muito especial em que o tipo de homotopia de um CW-complexo é determinado por seus grupos de homotopia é quando todos os grupos de homotopia são triviais, pois então a aplicação inclusão de uma 0-célula no complexo induz um isomorfismo sobre os grupos de homotopia e assim o complexo se retrai por deformação sobre a 0-célula.*

O Lema seguinte será utilizado quando falarmos em Torre de Postnikov.

Lema 2.3.2. (*Lema da Extensão*) *Dados (X, A) um par CW e $f : A \longrightarrow Y$ uma aplicação com Y conexo por caminhos, então f pode ser estendida a uma aplicação $\varphi : X \longrightarrow Y$ se $\pi_{n-1}(Y) = 0$ para todo n tal que $X - A$ tem células de dimensão n.*

Demonstração: ([5] Lema 4.7, p. 348).

Definição 2.3.2. *Sejam X e Y CW-complexos. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é chamada uma aplicação celular se satisfaz $f(X^n) \subset Y^n$ para todo n.*

Teorema 2.3.2. (***Teorema da Aproximação Celular***) *Toda aplicação $f : X \longrightarrow Y$ de CW-complexos é homotópica à uma aplicação celular. Se f já é celular sobre um subcomplexo $A \subset X$, a homotopia pode ser tomada como sendo estacionária sobre A.*

Demonstração: ([5] Teorema 4.8, p. 349).

Observação 2.3.2. *Com o resultado acima podemos justificar que* $\pi_i(S^n) = 0$ *se* $i < n$. *De fato, considere* $[\alpha] \in \pi_i(S^n)$, *então* $\alpha : S^i \longrightarrow S^n$. *Pelo teorema acima existe uma aplicação* $\alpha' : S^i \longrightarrow S^n$ *celular que é homotópica a* α. *Como* α' *é celular e* $i < n$ *então a imagem de* α' *contém apenas um ponto (a 0-célula* $e^0 \in S^n$*), ou seja,* α' *é uma aplicação constante. Logo* $[\alpha] = [\alpha'] = 0$ *e portanto* $\pi_i(S^n) = 0$ *se* $i < n$.

Proposição 2.3.2. (***Aproximação Celular para Pares***) *Toda aplicação* $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ *de pares CW pode ser deformada através de aplicações* $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$ *a uma aplicação celular. Além disso, se* f *é celular sobre um subcomplexo* L *de* X *então a homotopia de* f *a uma celular pode ser tomada estacionária sobre* L.

Demonstração: Consideremos a restrição $f\,|_A : A \longrightarrow B$. Pelo teorema da aproximação celular podemos deformar $f\,|_A$ a uma aplicação celular $g_A : A \longrightarrow B$ através de uma homotopia $H_A : A \times I \longrightarrow B$ tal que $H_A(x, 0) = f\,|_A(x)$ e $H_A(x, 1) = g_A(x)$.

Agora, como um par (X, A) de CW-complexos tem a propriedade de extensão de homotopia (Proposição 2.3.1), considerando $H : X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(a, t) = H_A(a, t) \in B$ (para $x \in X$ e $(a, t) \in A \times I$), segue que H pode ser estendida a uma aplicação $\tilde{H} : X \times I \longrightarrow Y$. Assim considerando $g(x) := \tilde{H}(x, 1)$, temos que $f \sim g$, com $g\,|_A = g_A$ que é celular sobre $A \subset X$ e $\tilde{H}(a, t) \in B$ para todo $(a, t) \in A \times I$. Novamente pelo teorema da aproximação celular, existe uma homotopia $\tilde{\tilde{H}}$ entre g e uma aplicação celular $g_1 : X \longrightarrow Y$, com $\tilde{\tilde{H}}$ estacionária sobre A, assim $\tilde{\tilde{H}}(a, t) = \tilde{\tilde{H}}(a, 0) = g(a) \in B$. Logo obtemos de $f \sim g$ e $g \sim g_1$, que $f \sim g_1$ com g_1 celular (e essa homotopia é dada através de aplicações $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$). ■

Corolário 2.3.1. *Um par de CW-complexos (X,A) é n-conexo se todas as células de X-A tem dimensão maior que n. Em particular o par* (X, X^n) *é n-conexo, daí a inclusão* $X^n \hookrightarrow X$ *induz isomorfismos* $\pi_i(X^n) \longrightarrow \pi_i(X)$ *para* $1 \leq i < n$ *e uma sobrejeção de* $\pi_n(X^n) \longrightarrow \pi_n(X)$.

Demonstração: Um elemento de $\pi_i(X, A, x_0)$ pode ser visto como uma classe de homotopia de uma aplicação $f : (D^i, S^{i-1}, x_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$. Aplicando a aproximação celular para pares, temos que f pode ser deformada através de aplicações $(D^i, S^{i-1}) \longrightarrow (X, A)$ a uma aplicação celular g. Assim $[f] = [g]$, com g celular. Em particular g é celular sobre S^{i-1} e assim novamente pela aproximação celular para pares obtemos que g é homotópica a uma aplicação $g_1 : (D^i, S^{i-1}) \longrightarrow (X, A)$ (que é celular) por uma homotopia estacionária sobre S^{i-1}. Da hipótese que as células em $X - A$ tem dimensão maior que n, segue que $X^i = A^i$ (mesmos i-esqueletos) para $i \leq n$. Como g_1 é celular, $g_1(D^i) \subset X^i = A^i$, ou seja, $Im(g_1) \subset A$. Assim, pelo critério da compressão (Proposição 1.3.1), $[g_1] = 0$, $[f] = [g] = [g_1] = 0$ e portanto $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ para $i \leq n$.

Claramente as células em $X - X^n$ (se existir) tem dimensão maior que n e assim (X, X^n) é n-conexo.

Agora para a última afirmação, considere a seguinte parte da seqüência exata longa de homotopia do par (X, X^n) (Proposição 1.3.2)

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(X, X^n, x_0) \longrightarrow \pi_i(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_i(X, x_0) \longrightarrow \pi_i(X, X^n, x_0) \longrightarrow \cdots$$

Se $i \leq n-1$, então $i+1 \leq n$ e assim $\pi_{i+1}(X, X^n, x_0) = 0 = \pi_i(X, X^n, x_0)$. Logo, para $i < n$, obtemos isomorfismos $\pi_i(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_i(X, x_0)$. Quando $i = n$, como $\pi_n(X, X^n, x_0) = 0$, temos a sequência exata:

$$\cdots \pi_n(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \longrightarrow 0$$

portanto a sobrejeção afirmada.

O resultado seguinte nos dá o cálculo de $\pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha)$ a partir de $\pi_n(S^n)$ e da sequência exata longa do par.

Proposição 2.3.3. *$\pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha) \simeq \oplus_\alpha \mathbb{Z}_\alpha$, para $n \geq 2$, mais precisamente $\pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha)$ é abeliano livre tendo como base as classes de homotopias das inclusões $S^n_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha S^n_\alpha$.*

Demonstração: Suponhamos primeiro que há somente um número finito de somandos $S^n_{\alpha_1}, \ldots, S^n_{\alpha_k}$. Podemos olhar $\bigvee_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}$ como o n-esqueleto do produto $\prod_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}$, onde à $S^n_{\alpha_i}$ é dado a estrutura usual de CW e $\prod_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}$ tem a CW estrutura do produto. Observe que $\prod_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}$ tem células de dimensões múltiplas de n, mais especificamente, de dimensões $0,\ n,\ 2n, ...,\ kn$. Assim o par $(\prod_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}, \bigvee_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i})$ é $(2n-1)$ - conexo pois $\prod_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}$ é obtido de $\bigvee_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}$ pela adjunção de células de dimensão maior ou igual a $2n$, e obviamente, $2n-1 < 2n$. (Por exemplo, $S^2_1 \times S^2_2 \times S^2_3 = (e^0_1 \cup e^2_1) \times (e^0_2 \cup e^2_2) \times (e^0_3 \cup e^2_3) \equiv e^0 \cup (e^2_1 \cup e^2_2 \cup e^2_3) \cup (e^4_{12} \cup e^4_{13} \cup e^4_{23}) \cup e^6$ tem células de dimensões $0,\ 2,\ 2.2 = 4,\ 3.2 = 6$. Ainda, $\prod_{i=1}^{3} S^2_i$ é obtido de $\bigvee_{i=1}^{3} S^2_i$ por adjunção das células $e^4_{12},\ e^4_{13},\ e^4_{23},\ e^6$.)

Daí, concluímos, usando o Corolário 2.3.1 (visto que o (2n-1) - esqueleto de $X = \prod_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}$ é igual a $\bigvee_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}$) que a inclusão $\bigvee_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}$ induz um homomorfismo de $\pi_j(\bigvee_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i})$ em $\pi_j(\prod_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i})$ que é um isomorfismo para $j < 2n-1$ e uma sobrejeção para $j = 2n-1$. Em particular, temos um isomorfismo no nível $j = n$ visto que $n < 2n-1$ se $n \geq 2$.

Agora, sabemos que $\pi_n(\prod_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}) \simeq \oplus_{i=1}^{k} \pi_n(S^n_{\alpha_i})$ e cada $\pi_n(S^n_{\alpha_i})$ é isomorfo ao grupo $\mathbb{Z}$. Assim, $\oplus_{i=1}^{k} \pi_n(S^n_{\alpha_i}) \simeq \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{\alpha_i}$, o grupo abeliano livre tendo como base as inclusões $S^n_{\alpha_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}$, e portanto obtemos $\pi_n(\bigvee_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}) \simeq \pi_n(\prod_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}) \simeq \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{\alpha_i}$ para todo $n \geq 2$. Isto para o caso de um número finito de somandos S^n_α's.

Consideremos então o caso geral (com infinitos somandos S^n_α's). Para reduzir esse caso ao caso finito, considere o homomorfismo
$\phi : \oplus_\alpha \pi_n(S^n_\alpha) \longrightarrow \pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha)$ induzido pelas inclusões $S^n_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha S^n_\alpha$. Então ϕ é sobrejetora pois toda aplicação $f : S^n \hookrightarrow \bigvee_\alpha S^n_\alpha$, representando um elemento de $\pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha)$, tem (visto que S^n é compacto) imagem compacta contida na soma wedge de um número finito de S^n_α's, isto é, existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tal que $Im(f) \subset \bigvee_{i=1}^{k} S^n_{\alpha_i}$. Logo, pelo caso finito (já provado), concluímos que existe $u \in \oplus_{i=1}^{k} \pi_n(S^n_{\alpha_i}) \subset \oplus_\alpha \pi_n(S^n_\alpha)$ tal que $\phi(u) = [f]$, ou seja, $[f] \in Im(\phi)$.

Para concluir que ϕ é injetora observemos que se $[f] = 0$ em $\pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha)$, isto é, f é homotópica a uma constante, então a (nulo)homotopia

$H : S^n \times I \longrightarrow \bigvee_{\alpha} S^n_\alpha$ tem imagem compacta e assim $Im(H) \subset \bigvee_{i=1}^{n} S^n_{\alpha_i}$ (soma wedge de um número finto de esferas), ou seja, f é homotópica em $\bigvee_{i=1}^{n} S^n_{\alpha_i}$ a uma aplicação constante. Daí a injetividade também segue do caso finito. ■

Finalizando essa seção mostramos um resultado fundamental para a construção dos $K(G, n)$-espaços:

Definição 2.3.3. *Uma Torre de Postnikov para uma espaço conexo por caminhos X é um diagrama comutativo (como abaixo) tal que:*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] \\
 & X_3 \arrow[d] \\
 & X_2 \arrow[d] \\
X \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[uur] & X_1
\end{tikzcd}$$

(*1*) *cada aplicação $X \hookrightarrow X_n$ induz um isomorfismo $\pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(X_n)$ para $i \leq n$,*

(*2*) *$\pi_i(X_n) = 0$, para $i > n$.*

Teorema 2.3.3. (***Torre de Postnikov***) *Para todo CW-complexo conexo X e $n \geq 1$, podemos construir espaços $X_n \supset X$ tais que $\pi_i(X) \simeq \pi_i(X_n)$ para $i \leq n$ e $\pi_i(X_n) = 0$ se $i > n$. Além disso essa seqüência se encaixa num diagrama comutativo como acima. Ou seja, X tem uma Torre de Postnikov.*

Demonstração: Escolha aplicações celulares $\varphi_\alpha : S^{n+1} \longrightarrow X$, onde $[\varphi_\alpha]$, $\alpha \in \Lambda$ geram $\pi_{n+1}(X)$ (podemos supor φ_α celulares pois pelo Teorema da Aproximação Celular, considerando que X e S^{n+1} são CW-complexos, toda aplicação $\psi : S^{n+1} \longrightarrow X$ é homotópica à uma aplicação celular $\varphi : S^{n+1} \longrightarrow X$). Use estas aplicações para colar células e^{n+2}_α a X, formando um CW-complexo $Y = X \bigcup (\bigcup_\alpha e^{n+2}_\alpha)$.

Considere o par (Y, X). Então, $Y - X$ tem células de dimensão $n+2 > n+1$. Logo pelo Corolário 2.3.1, (Y, X) é $(n+1)$ - conexo. Usando a sequência exata longa de homotopia para o par (Y, X) obtemos (de maneira similar ao que feito na demonstração do referido corolário para (X, X^n)) que a inclusão $X \hookrightarrow Y$ induz isomorfismos $\pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(Y)$ para $i < n+1$ (ou $i \leq n$).

Para ver que $\pi_{n+1}(Y) = 0$, seja $[\rho] \in \pi_{n+1}(Y)$, $\rho : S^{n+1} \longrightarrow Y$. Como antes, existe pela aproximação celular $h_0 : S^{n+1} \longrightarrow Y$ tal que $\rho \sim h_0$ e $Im(h_0) \subset X$. Assim podemos associar um elemento em $\pi_{n+1}(X)$ dado pela classe de $\tilde{h} : S^{n+1} \longrightarrow X$ onde $\tilde{h}(u) = h_0(u)$ para todo $u \in S^{n+1}$.

Suponha que a aplicação $\tilde{h}$ seja um gerador para $\pi_{n+1}(X)$, então $j_\sharp([\tilde{h}]) = 0$ em $\pi_n(Y)$, pois pela construção inicial foi colado via $\tilde{h}$ uma célula de dimensão $n+2$ em $X \subset Y$. Mas $0 = j_\sharp([\tilde{h}]) = [h_0] = [\rho]$. Logo $\pi_{n+1}(Y) = 0$. Agora, se $\tilde{h}$ não for um gerador para $\pi_{n+1}(X)$, ele é um produto de geradores e da mesma forma temos $[\rho] = j_\sharp([\tilde{h}]) = 0$.

Obtemos então um espaço Y tal que $\pi_i(X) \simeq \pi_i(Y)$, para $i \leq n$ e $\pi_{n+1}(Y) = 0$. O processo pode ser repetido com Y no lugar de X e n substituído por $n+1$, de modo a obter um novo espaço $Y_2 = Y \bigcup (\bigcup_\beta e_\beta^{n+3})$ com $\pi_{n+2}(Y_2) = 0$ (visto que anexamos $(n+3)$ - células), $\pi_{n+1}(Y_2) \simeq \pi_{n+1}(Y) = 0$ e $\pi_i(Y_2) \simeq \pi_i(Y) \simeq \pi_i(X)$ se $i \leq n$. Depois de infinitas iterações temos estendido X para um CW-complexo X_n obtido de X por anexar células de dimensão maior ou igual a $n+2$, tal que a inclusão $X \hookrightarrow X_n$ induz isomorfismos $\pi_i(X) \simeq \pi_i(X_n)$ para $i \leq n$ e $\pi_i(X_n) = 0$, para $i > n$.
Finalmente, aplicando o Lema da Extensão (Lema 2.3.2) temos que a inclusão $X \hookrightarrow X_n$ pode ser estendida para uma aplicação $X_{n+1} \longrightarrow X_n$, pois X_{n+1} é obtido de X anexando células de dimensão n+3 ou maior, e $\pi_i(X_n) = 0$, para $i > n$, obtendo assim um diagrama comutativo como acima, ou seja uma Torre de Postnikov para X. ■

Observação 2.3.1. *(1) Pode-se olhar os espaços X_n como truncações de X que produzem, sucessivamente, melhores aproximações para X quando n cresce.*

(2) A Torre de Postnikov para X, dada no resultado anterior, é única a menos de homotopia ([5], Corolário 4.19, p. 355).

Capítulo 3

Espaços de Eilenberg Mac-Lane

3.1 Definição e Propriedades

Definição 3.1.1. *Seja G um grupo. Um espaço topológico conexo X tal que $\pi_n(X) = G$ e $\pi_i(X) = 0$ se $i \neq n$ $(n \geq 1)$, é chamado um **espaço de Eilenberg Mac-Lane do tipo (G, n)**, ou simplesmente, um **K(G, n) - espaço**. E usualmente denotamos tal X por $K(G, n)$.*

Exemplo 3.1.1. *O espaço $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ com a topologia usual é um $K(\mathbb{Z}, 1)$, pois $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ e $\pi_n(S^1) = 0$, para todo $n \geq 2$ (esta última afirmação segue do fato que $\mathbb{R}$ é o recobrimento universal de S^1).*

Proposição 3.1.1. *Sejam G e L grupos. Se X é um $K(G, n)$ e Y é um $K(L, n)$ então $X \times Y$ é um $K(G \oplus L, n)$.*

Demonstração: Segue do fato que $\pi_j(X \times Y) \simeq \pi_j(X) \oplus \pi_j(Y), \forall j \geq 1$. ■

Note que se X é um $K(G, n)$ e Y é um $K(L, m)$, com $n \neq m$ então $X \times Y$ não é um $K(G \oplus L, r)$ para nenhum r, pois $\pi_n(X \times Y) = G$ e $\pi_m(X \times Y) = L$ e se $j \neq n$ e $j \neq m$ então $\pi_j(X \times Y) = 0$.

Para o caso $n = 1$, a condição $\pi_i(X) = 0$ para $i > 1$, pode ser substituída (quando o espaço têm recobrimento universal do mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo) pela condição de que X tem um espaço de recobrimento universal contráctil, como veremos na

Proposição 3.1.2. *Um CW-complexo X é um $K(G, 1)$ - espaço se, e somente se, $\pi_1(X) = G$ e o espaço de recobrimento universal de X é contráctil.*

Demonstração: Suponhamos que X seja um $K(G,1)$. Então, por definição, $\pi_1(X) \simeq G$ e $\pi_k(X) = 0,\ k \geq 2$. Seja $\tilde{X}$ o recobrimento universal de X e considere $p : \tilde{X} \to X$ a projeção associada. Essa aplicação induz um isomorfismo $p_\sharp : \pi_k(\tilde{X}) \to \pi_k(X),\ \forall k \geq 2$. Logo $\pi_k(\tilde{X}) = 0,\ \forall k \geq 2$. Como $\tilde{X}$ é recobrimento universal de X, então $\pi_1(\tilde{X}) = 0$. Assim temos que $\pi_n(\tilde{X}) = 0, \forall n$. Agora considere $f : \tilde{X} \to \{x_0\}$ a aplicação constante. Essa aplicação é contínua e induz um isomorfismo $f_\sharp : \pi_n(\tilde{X}) \to \pi_n(\{x_0\})$. Então, pelo Teorema de Whitehead (Teorema 2.3.1), f é uma equivalência de homotopia, ou seja, $\tilde{X}$ tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto. Portanto $\tilde{X}$ é contráctil. A recíproca é obvia. ■

3.2 Existência dos K(G, n) - Espaços

Estamos interessados no seguinte problema: Dado um grupo G e $n \geq 1$, sempre existe um CW-complexo que é do tipo $K(G,n)$ (supondo G abeliano se $n \geq 2$)? Conforme veremos, a resposta é afirmativa.

Vejamos inicialmente o caso n=1.

Teorema 3.2.1. *Para qualquer grupo G podemos construir um CW-complexo do tipo $K(G,1)$.*

Demonstração: Dado um grupo G, como já visto anteriormente (Corolário 1.2.1) constrói-se inicialmente, a partir de uma apresentação de $G \simeq F/R$, onde F é livre gerado por $\mathbf{A}$ (conjunto de geradores) e R é o menor subgrupo normal de F gerado por $\mathbf{B}$ (conjunto de relações), um 2-complexo $Y := (\bigvee_{\alpha\in\mathbf{A}} S^1_\alpha)\bigcup(\bigcup_{\beta\in\mathbf{B}} e^2_\beta)$ tal que $\pi_1(Y) = G$. Usando o Teorema 2.3.3 (Torre de Postnikov) obtivemos a partir de Y, por colar células de dimensão maior ou igual a três, um espaço $X = X_1$ de modo que $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = G$ e $\pi_j(X) = 0$ para $j \geq 2$, isto é, obtivemos um $K(G,1)$-espaço. ■

Observação 3.2.1. *Note que, de acordo com a demonstração anterior o primeiro espaço X_1 da Torre de Postnikov já nos dá o espaço $K(G,1)$ desejado. No entanto é interessante observar que para obter X_1, em alguns casos, temos que colar células infinitamente (vide Exemplo 3.3.4).*

Nosso objetivo agora é a construção de um $K(G,n)$ - espaço com $n \geq 2$. Para tanto necessitamos de alguns resultados.

Teorema 3.2.2. (*Excisão para grupos de homotopia*) *Seja X um CW-complexo que é decomposto como a união de subcomplexos A e B com intersecção não vazia $C = A \cap B$. Se (A, C) é m - conexo e (B, C) é n - conexo, $m, n \geq 0$, então a aplicação $\pi_i(A, C) \longrightarrow \pi_i(X, B)$ induzida pela inclusão é um isomorfismo para $i \leq m + n$ e uma sobrejeção para $i = m + n$.*

Demonstração: ([5], Teorema 4.23, p. 360).

Proposição 3.2.1. *Se um par CW, (X, A), é r - conexo e A é s - conexo, com $r, s \geq 0$, então e aplicação $\pi_i(X, A) \longrightarrow \pi_i(X/A)$ induzida pela aplicação quociente $X \longrightarrow X/A$ é um isomorfismo para $i \leq r + s$ e uma sobrejeção para $i = r + s + 1$.*

Demonstração: Considere $X \bigcup CA$, o complexo obtido de X colando um cone CA ao longo de $A \subset X$. O cone CA (Exemplo 2.1.6- Join) é a união de segmentos de reta ligando pontos de A à um vértice externo p. Então CA é homotópico ao conjunto unitário p (por exemplo tome a homotopia linear $H : CA \times I \to CA; \quad (x,t) \mapsto tp + (1-t)x)$. Ou seja, CA é um subcomplexo contráctil de $X \bigcup CA$. Assim a aplicação quociente $X \bigcup CA \xrightarrow{q} (X \bigcup CA)/CA = X/A$ é uma equivalência de homotopia visto que o par $(X \bigcup CA,\ CA)$ é um par CW e portanto tem a propriedade de extensão de homotopia (Proposição 2.3.1). Conseqüentemente q induz um isomorfismo de $\pi_i(X \bigcup CA)$ em $\pi_i((X \bigcup CA)/CA) = \pi_i(X/A)$. Assim temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(X,A) \arrow[r] & \pi_i(X \cup CA, CA) \arrow[r] & \pi_i(X \cup CA/CA) = \pi_i(X/A) \\
 & \pi_i(X \cup CA) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

onde o isomorfismo vertical vem da seqüência exata longa

$$\ldots \longrightarrow \pi_i(CA) \longrightarrow \pi_i(X \cup CA) \longrightarrow \pi_i(X \cup CA, CA) \longrightarrow \pi_{i-1}(CA) \longrightarrow \cdots$$

e do fato que CA é contráctil. Donde obtém-se da comutatividade, um isomorfismo $\pi_i(X \cup CA, CA) \longrightarrow \pi_i(X/A)$ (*).

Ainda, da sequência exata longa para o par (CA, A),

$$\ldots \longrightarrow \pi_i(A) \longrightarrow \pi_i(CA) \longrightarrow \pi_i(CA,\ A) \longrightarrow \pi_{i-1}(A) \longrightarrow \cdots,$$

do fato que A é s-conexo (por hipótese) e que CA é contráctil, obtemos que $\pi_i(CA, A) = 0$ para $i \leq s+1$, isto é, (CA, A) é s+1-conexo.

Agora usando o resultado anterior (*Excisão para Grupos de Homotopia* - Teorema 3.2.2) para o espaço $\mathcal{X} = X \cup CA$, $C = X \cap CA = A$ e os pares (X, A) r - conexo e (CA, A) s+1 - conexo, concluímos que o homomorfismo $\pi_i(X, A) \longrightarrow \pi_i(X \cup CA,\ CA)$, induzido pela inclusão, é um isomorfismo para $i < r+s+1$ e uma sobrejeção para $i = r+s+1$.

Logo, considerando o isomorfismo (*) acima, concluímos que $\pi_i(X, A) \longrightarrow \pi_i(X/A)$ é um isomorfismo para $i \leq r+s$ é uma sobrejeção para $i = r+s+1$. ■

Lema 3.2.1. *O espaço $A = \bigvee_{\alpha\in\Lambda} S^n_\alpha$ (bouquet de n-esferas) $n \geq 2$, é $(n-1)-$ conexo.*

Demonstração: Para $j \leq n-1$, seja $[\varphi] \in \pi_j(A)$, com $\varphi : S^j \longrightarrow A$. Pelo Teorema da Aproximação Celular, $\varphi \sim \psi : S^j \longrightarrow A$, com ψ celular. Agora o j- esqueleto de A, A^j, $j \leq n-1$ é um ponto (a única 0-célula) uma vez que A não possui células de dimensão j, para $0 < j \leq n-1$ e portanto, ψ é a aplicação constante. Daí $[\varphi] = [\psi] = 0$. Assim $\pi_j(A) = 0$, para $j \leq n-1$, ou seja, A é $(n-1)$-conexo. ■

Proposição 3.2.2. *Para todo grupo abeliano G e $n \geq 2$, existe um CW-complexo $(n-1)$-conexo, de dimensão $n+1$ tal que $\pi_n(X) \simeq G$.*

Demonstração: Como no caso $n = 1$, considere uma apresentação do grupo G, $G =< \mathbf{A}; \mathbf{B} >$, ou seja, $G \simeq F/R$ onde F é o grupo livre gerado por $\alpha \in \mathbf{A}$ e R, normal a F, é o subgrupo gerado pelo conjunto de relações $\beta \in \mathbf{B}$. Notemos que nesse caso, como G é abeliano, F é *abeliano* livre.

Para cada gerador α associamos uma n-esfera S^n_α. Então, considerando o espaço $\bigvee_{\alpha\in\mathbf{A}} S^n_\alpha$ temos, do fato que $n \geq 2$ (Proposição 2.3.3), que

$$\pi_n(\bigvee_{\alpha\in\mathbf{A}} S^n_\alpha) \simeq \oplus_{\alpha\in\mathbf{A}}\mathbb{Z}_\alpha \simeq F.$$

Cada relação $\beta \in \mathbf{B} \subset F$ entre os geradores $\alpha's$ pode ser realizada como uma classe em $\pi_n(\bigvee_{\alpha\in\mathbf{A}} S^n_\alpha)$, $[\varphi_\beta]$, representada por uma aplicação

$\varphi_\beta : S^n \longrightarrow \bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S^n_\alpha$. Considere o CW-complexo X obtido de $\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S^n_\alpha$ anexando $(n+1)$-células e^{n+1}_β via φ_β, preservando ponto base,

$$X = (\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S^n_\alpha) \bigcup_\beta e^{n+1}_\beta.$$

Note que $X^n = \bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S^n_\alpha$, que o par (X, X^n) é n-conexo (Corolário 2.3.1) e que X^n é $(n-1)$-conexo (pelo Lema anterior). Logo, pela Proposição 3.2.1, o homomorfismo $\pi_i(X, X^n) \longrightarrow \pi_i(X/X^n)$, induzido pela aplicação quociente $X \longrightarrow X/X^n$ é um isomorfismo para $i \leq 2n-1$ (e uma sobrejeção para $i = 2n$). Em particular, considerando os casos $n+1$ e n, e o fato que $X/X^n = \bigvee_{\beta \in \mathbf{B}} S^{n+1}_\beta$, obtemos que

- $\pi_{n+1}(X, X^n) \simeq \pi_{n+1}(X/X^n) = \pi_{n+1}(\bigvee_{\beta \in \mathbf{B}} S^{n+1}_\beta) = \oplus_{\beta \in \mathbf{B}} \mathbb{Z}_\beta$, o grupo abeliano livre gerado pelas aplicações características $[\phi_\beta]$ das células e^{n+1}_β, e
- $\pi_n(X, X^n) \simeq \pi_n(X/X^n) = 0$ (visto que $X/X^n = \bigvee_{\beta \in \mathbf{B}} S^{n+1}_\beta$ é n - conexo).

A sequência exata para o par (X, X^n) nos dá:

$$\cdots \to \pi_{n+1}(X, X^n) = \oplus_{\beta \in \mathbf{B}} \mathbb{Z}_\beta \xrightarrow{\partial} \pi_n(X^n) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_n(X) \xrightarrow{j_\sharp} \pi_n(X, X^n) = 0.$$

Pela exatidão da sequência, $Im(i_\sharp) = ker(j_\sharp) = \pi_n(X)$. Então, pelo Teorema do Homomorfismo, $\pi_n(X) = Im(i_\sharp) \simeq \pi_n(X^n)/ker(i_\sharp)$. Agora, o operador bordo ∂ leva as aplicações características $[\phi_\beta]$ nas classes $[\varphi_\beta]$, assim $Im(\partial) = \langle [\varphi_\beta], \beta \in \mathbf{B} \rangle = \oplus_{\beta \in \mathbf{B}} \mathbb{Z}_\beta = R$. Daí, $ker(i_\sharp) = Im(\partial) = R$, e então temos

$$\pi_n(X) \simeq \pi_n(X^n)/ker(i_\sharp) = \pi_n(\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S^n_\alpha)/Im(\partial) = F/R \simeq G.$$

Para ver que X é $n-1$ conexo, raciocinamos como no Lema anterior, isto é, usamos o fato que toda aplicação $\varphi : S^i \longrightarrow X$ é homotópica a uma aplicação celular (teorema da aproximação celular) e que tal aplicação será constante se $i < n$. ■

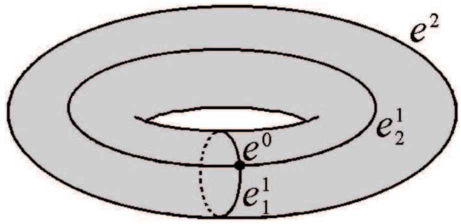
Teorema 3.2.3. *Seja G um grupo abeliano qualquer e $n \geq 2$ um inteiro. Então existe um CW-complexo do tipo $K(G, n)$.*

Demonstração: Dado um grupo abeliano G e $n \geq 2$, pela Proposição anterior, existe um CW-complexo $(n-1)$-conexo X, de dimensão $n+1$ tal que $\pi_n(X) \simeq G$. Usando o Teorema 2.3.3 (Torre de Postnikov) para X pode-se construir uma sequência de espaços X_m tal que $\pi_i(X_m) \simeq \pi_i(X)$ para $i \leq m$ e $\pi_i(X_m) = 0$ para $i > m$. Em particular, para $m = n$, e considerando $Z = X_n$, temos $\pi_i(Z) \simeq \pi_i(X)$ para $i \leq n$ e $\pi_i(Z) = 0$ para $i > n$. Assim $\pi_i(Z) \simeq \pi_i(X) = 0$, para $1 \leq i \leq n-1$, $\pi_n(Z) \simeq \pi_n(X) = G$ e $\pi_i(Z) = 0$ para $i > n$, ou seja, Z é um $K(G,n)$ - espaço. ■

3.3 Exemplos

Exemplo 3.3.1. *Já vimos que o círculo unitário S^1 é um K($\mathbb{Z}$,1)-espaço. Note que uma apresentação para $G = \mathbb{Z}$ é $< \alpha, \emptyset >$. Nesse caso, considerando a construção de $K(G,1)$ - espaços, tomamos inicialmente o "bouquet" com um único círculo $S^1 = S^1_\alpha$ e como não há relações não necessitamos colar 2-células para obter um CW-complexo 2-dimensinonal X com $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$. Temos ainda que $\pi_j(S^1) = 0, \forall j \geq 2$ e assim, o X_1 construído na Torre é o S^1 e portanto S^1 é um espaço do tipo $K(\mathbb{Z},1)$. Um raciocínio similar nos dá que o bouquet $Y = \bigvee_{\alpha \in \boldsymbol{A}} S^1_\alpha$ é um $K(\boldsymbol{F},1)$, onde $\boldsymbol{F}$ é o grupo livre gerado por $\boldsymbol{A}$.*

Exemplo 3.3.2. *O toro T^2 é um K($\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, 1) - espaço. Temos que $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \simeq F/R$, onde F é um grupo livre gerado por $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ e R é o menor subgrupo normal de F contendo a relação $\beta = \alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}$. Considere $X^1 = \bigvee_{i=1}^{2} S^1_i$ (figura oito). Então $\pi_1(\bigvee_{i=1}^{2} S^1_i) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Colemos uma 2-célula e^2 em X^1, a partir da relação $\beta = \alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}$, para obtermos o CW-complexo $2-$ dimensional $X^2 = X^1 \cup e^2$ com $\pi_1(X^2) = (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})/R \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Agora $X^2 = T^2 = S^1 \times S^1$ e $\pi_j(T^2) = \pi_j(\mathbb{R}^2) = 0, \forall \mathrm{j} \geq 2$. Portanto T^2 é um espaço do tipo $K(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 1)$. Notemos que esse é um caso em que foi necessário colar uma 2- célula para obter o complexo 2-dimensional com grupo fundamental $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ mas o complexo obtido já é um $K(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 1)$ e assim não houve necessidade de usar a Torre de Postnikov, uma vez que o espaço $X_1 = T^2$ já tem π_j trivial para $j \geq 2$.*



Exemplo 3.3.3. *Superfícies fechadas com grupo fundamental infinito, em outras palavras, superfícies fechadas que não sejam S^2 e $\mathbb{R}P^2$, são $K(G,1)$-espaços. Isto segue do fato que as únicas superfícies sem bordo que são simplesmente conexas são S^2 e $\mathbb{R}^2$ (resultado da teoria de superfícies), de modo que recobrimento universal de uma superfície fechada com grupo fundamental infinito deve ser $\mathbb{R}^2$ (pois o recobrimento universal nesse caso é não compacto visto que as fibras são subconjuntos discretos que estão em correspondência com o grupo fundamental que é infinito), e $\mathbb{R}^2$ é contrátil. Ainda, superfícies não fechadas são $K(G,1)$ - espaços com G livre, pois tais superfícies se retraem por deformação sobre grafos, e o grupo fundamental de um grafo é livre ([7], VI Teorema 5.1), além disso possuem grupos de homotopias superiores triviais.*

Exemplo 3.3.4. *O espaço projetivo real infinito dimensional $\mathbb{R}P^\infty$, é um $K(\mathbb{Z}_2,1)$ - espaço. Para isso, notemos que o grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_2$ tem como apresentação $G =< \alpha;\ \alpha^2 >$. Consideremos o grupo livre $F \simeq \mathbb{Z}$ com um gerador α e $X^1 = S^1$. Colemos uma 2-célula em X^1 a partir da relação α^2, o espaço $Y = X^2$, assim obtido, satisfaz $\pi_1(X^2) = \mathbb{Z}_2$ e pode ser identificado com o espaço $\mathbb{R}P^2$. Temos então um CW-complexo 2- dimensional que tem grupo fundamental $\mathbb{Z}_2$. Agora $\pi_2(\mathbb{R}P^2) \simeq \pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z} \neq 0$, assim precisamos usar a construção na Torre de Postnikov para obter o espaço "X_1" desejado. Ou seja, temos que adicionar células de dimensões superiores ($n \geq 1+2=3$). De fato, nesse caso o processo é infinito, isto é, adicionamos uma célula em cada dimensão: $\mathbb{R}P^3 \subset \mathbb{R}P^2 \bigcup \mathrm{e}^3$ e $\pi_1(\mathbb{R}P^3) \simeq \pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(\mathbb{R}P^3) = 0$ mas $\pi_3(\mathbb{R}P^3) \simeq \pi_3(S^3) \simeq \mathbb{Z} \neq 0$ (tem um gerador). Anexamos então mais uma célula de modo a obter um espaço (o $\mathbb{R}P^4 = \mathbb{R}P^3 \bigcup \mathrm{e}^4$), que agora satisfaz $\pi_1(\mathbb{R}P^4) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(\mathbb{R}P^4) = \pi_3(\mathbb{R}P^4) = 0$ mas $\pi_4(\mathbb{R}P^4) \simeq \pi_4(S^4) \simeq \mathbb{Z} \neq 0$, continuando o processo (Torre de Postnikov), obtemos o espaço $X_1 = \mathbb{R}P^\infty$, que é um $K(\mathbb{Z}_2,1)$-espaço.*

Observação 3.3.1. *Podemos concluir que $\mathbb{R}P^\infty$ é um $K(\mathbb{Z}_2,1)$ por verificar que seu recobrimento universal é S^∞. Uma homotopia entre a aplicação* *identidade de S^∞ e uma aplicação constante pode ser construída como segue: Primeiro definimos $H : \mathbb{R}^\infty \times I \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ por $H((x_1, x_2, ...),\ t) = (1-t)(x_1, x_2, ...) + t(0, x_1, x_2, ...)$. É claro que $H(.,t)$ leva vetor não nulo em vetor não nulo. Então $K : S^\infty \times I \longrightarrow S^\infty$; $K(x,t) := H(x,t)/\|H(x,t)\|$, onde $x = (x_1, x_2, ...)$, dá uma homotopia entre a aplicação identidade de S^∞ e a aplicação $g : (x_1, x_2, ...) \longrightarrow (0, x_1, x_2, ...)$. Agora uma homotopia entre g e a aplicação constante é dada por $L : S^\infty \times I \longrightarrow S^\infty$; $L(x,t) := S(x,t)/\|S(x,t)\|$, onde $S(x,t) = (1-t)(0, x_1, x_2, ...) + t(1, 0, 0, ...)$.*

Exemplo 3.3.5. *Generalizando o exemplo anterior, podemos construir um $K(\mathbb{Z}_m, 1)$- espaço como um espaço de Lens de dimensão infinita $L_m = S^\infty/\mathbb{Z}_m$, onde $\mathbb{Z}_m$ atua sobre S^∞ (visto como a esfera unitária em $\mathbb{C}^\infty$) pela multiplicação por escalar pela m-ésima raiz da unidade, um gerador desta ação é a aplicação $(z_1, z_2, \ldots) \mapsto e^{\frac{2\pi i}{m}}(z_1, z_2, \ldots)$. Pode-se verificar que esta é uma ação no espaço de recobrimento e que L_m é um $K(\mathbb{Z}_m, 1)$- espaço.([13], Teorema 2.10.10-demonstração, p. 86)*

Exemplo 3.3.6. *A partir dos exemplos anteriores, e do fato que um produto $K(G_1, 1) \times K(G_2, 1)$ é um $K(G_1 \times G_2, 1)$ podemos obter espaços $K(G, 1)$ para todo grupo abeliano finitamente gerado G. Para tanto basta lembrarmos que um grupo abeliano finitamente gerado é isomorfo a um produto de grupos cíclicos infinitos e finitos. Assim basta tomar o espaço formado por produtos de círculos e espaços de Lens de dimensão infinita.*

Exemplo 3.3.7. *Exemplos de $K(G, n)$- espaços, para $n \geq 2$, são raros. Pode-se verificar que o espaço $\mathbb{C}P^\infty$ é um $K(\mathbb{Z}, 2)$ e consequentemente generalizar esse exemplo tomando um produto de $\mathbb{C}P^\infty$'s para obter um $K(G, 2)$ com G um produto de $\mathbb{Z}$'s ([5], p. 365).*

3.4 Considerações Finais

(*1*) Observemos que $\pi_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é um grupo sem torção e T^2 é um CW-complexo de dimensão finita. Agora $\pi_1(\mathbb{R}P^\infty) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2$ é um grupo de torção e $\mathbb{R}P^\infty$ é um CW-complexo de dimensão infinita. De fato, usando cohomologia de grupos pode-se mostrar que se G tem torção então não existe um CW-complexo finito que seja $K(G, 1)$. ([5], Proposição 2.45, p. 149 ou [2], Corolário 3.2.1)

(*2*) Seja Y um CW-complexo. Então existe uma bijeção entre $[Y, K(G,n)]$ e $H^n(Y,\ G)$, onde $[X, Y]$ representa as classes de homotopia das aplicações de X em Y e G é um grupo abeliano. A prova desse resultado pode ser feita usando teoria de cohomologia ([5],Teorema 4.57, p. 393) ou obtida como uma aplicação da teoria de obstrução ([11], Teorema 8. 10, p. 428).

(*3*) Pode-se mostrar a unicidade dos espaços $K(G,n)$'s a menos de homotopia ([5], Teorema 1B.8, p. 90 para o caso $n = 1$; Proposição 4.30, p. 366 para o caso $n \geq 2$).

(*4*) Os $K(G,1)$- espaços, estabelecem uma relação entre a cohomologia de grupos e a de espaços uma vez que, para cada k, o grupo de (co)homologia, $H^k(G,M)$, de um grupo G com coeficientes em um $\mathbb{Z}$G-módulo M é isomorfo a $H^k(X, \mathbf{M})$, onde X é um $K(G,1)$ - espaço e $\mathbf{M}$ é um sistema de coeficientes locais para X associado ao $\mathbb{Z}$G-módulo M ([1] II. Proposição 4.1; III. § 1, p. 59).

Apêndice A

Grupo Fundamental

A.1 Caminhos Homotópicos e o Grupo Fundamental

Definição A.1.1. *Um caminho num espaço topológico X é uma aplicação contínua $\alpha : I = [0,1] \longrightarrow X$. Os pontos $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$ são chamados pontos inicial e final de α, respectivamente. Caminhos α e β com pontos iniciais e finais comuns, $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$, são ditos equivalentes se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que*

$$\begin{array}{lll} H(t,0) = \alpha(t), & H(t,1) = \beta(t), & t \in I, \\ H(0,s) = \alpha(0) = \beta(0), & H(1,s) = \alpha(1) = \beta(1), & s \in I, \end{array}$$

A aplicação H é chamada uma homotopia entre α e β. Para um dado valor de s, a restrição de H à $I \times \{s\}$ é chamada o nível s *de homotopia e é usualmente denotada por $H(\cdot, s)$, $H_s(\cdot)$ ou $h_s(\cdot)$.*

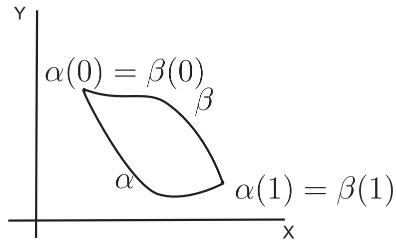
Definição A.1.2. *Um laço num espaço topológico X é um caminho α em X com $\alpha(0) = \alpha(1)$. O valor comum do ponto inicial e ponto final é chamado ponto base do laço. Dois laços α e β com mesmo ponto base x_0 são ditos equivalentes, ou homotópicos módulo x_0, se são equivalentes como caminhos. Em outras palavras, α e β são homotópicos módulo x_0 (denotado por $\alpha \sim_{x_0} \beta$) desde que exista uma homotopia $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que*

$$\begin{array}{ll} H(\cdot,0) = \alpha, & H(\cdot,1) = \beta, \\ H(0,s) = H(1,s) = x_0, & s \in I. \end{array}$$

Como $H(0,s)$ e $H(1,s)$ têm sempre valor x_0, independente da escolha de s

em $[0,1]$, às vezes se diz que o ponto base x_0 "fica fixo do começo ao fim da homotopia".

Exemplo A.1.1. *Os caminhos α e β no plano, representados na figura são equivalentes.*



Uma homotopia H que mostra a equivalência entre os caminhos é definida por $H(t,s) = s \cdot \beta(t) + (1-s)\cdot \alpha(t)$, com $(t,s) \in I \times I$. A homotopia essencialmente "puxa α na direção de β" sem perturbar os pontos finais. Se o espaço tivesse um buraco entre os traços dos caminhos α e β, então eles não seriam equivalentes.

O seguinte lema será muito útil nesta seção.

Lema A.1.1. (*Lema da Colagem ou Lema da Continuidade*) *Seja X um espaço topológico com subconjuntos fechados A e B tais que $X = A \cup B$. Sejam $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ aplicações contínuas tais que f(x)=g(x) para cada x em $A \cap B$. Então é contínua a aplicação $h : X \longrightarrow Y$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \in A \\ g(x), & se \quad x \in B. \end{cases}$$

Demonstração: Seja $V \subset Y$ um subconjunto fechado. Temos que $h^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V)$ é fechado em X, uma vez que f e g contínuas implicam que $f^{-1}(V)$ e $g^{-1}(V)$ são fechados em A e B, respectivamente, e conseqüentemente em X, pois A e B são fechados em X. Agora, a união finita de fechados é fechado, e então $h^{-1}(V)$ é fechado. Logo h é contínua. ■

Teorema A.1.1. *Os resultados seguintes são válidos:*
(a) *Equivalência de caminhos é uma relação de equivalência sobre o conjunto dos caminhos num espaço X.*
(b) *Equivalência de laços é uma relação de equivalência sobre o conjunto dos laços em X com ponto base x_0.*

Demonstração: Provemos o item (b). Considere o conjunto dos laços em X tendo como ponto base x_0. Qualquer laço é equivalente a ele mesmo pela homotopia $F(t,s) = \alpha(t), \quad (t,s) \in I \times I$. Então a relação $\sim_{x_0}$ é reflexiva. Suponhamos $\alpha \sim_{x_0} \beta$. Assim existe uma homotopia $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$H(\cdot, 0) = \alpha, \quad H(\cdot, 1) = \beta, \quad H(0, s) = H(1, s) = x_0, \quad s \in I.$$

Então a homotopia $\bar{H}(t,s) := H(t, 1-s), \quad (t,s) \in I \times I$ mostra que $\beta \sim_{x_0} \alpha$. Pois,

$$\bar{H}(\cdot, 0) = H(\cdot, 1) = \beta, \quad \bar{H}(\cdot, 1) = H(\cdot, 0) = \alpha$$

$$\bar{H}(0, s) = H(0, 1-s) = H(1, 1-s) = \bar{H}(1, s) = x_0, \ \forall s \in I.$$

Logo a equivalência de laços é uma relação simétrica.

Admita agora que os laços α, β e γ são tais que $\alpha \sim_{x_0} \beta$ e $\beta \sim_{x_0} \gamma$. Então existem homotopias H e K tais que

$$\begin{array}{ll} H : I \times I \to X; & K : I \times I \to X; \\ H(\cdot, 0) = \alpha, & K(\cdot, 0) = \beta, \\ H(\cdot, 1) = \beta, & K(\cdot, 1) = \gamma, \\ H(0, s) = H(1, s) = x_0, & K(0, s) = K(1, s) = x_0. \end{array}$$

A homotopia desejada $L : I \times I \to X$ é então definida por

$$L(t,s) = \begin{cases} H(t, 2s), & \text{se} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ K(t, 2s-1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Assim

$$L(\cdot, 0) = H(\cdot, 0) = \alpha, \quad L(\cdot, 1) = K(\cdot, 1) = \gamma.$$

$$L(0, s) = \begin{cases} H(0, 2s) = x_0, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ K(0, 2s-1) = x_0, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$L(1, s) = \begin{cases} H(1, 2s) = x_0, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ K(1, 2s-1) = x_0, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

A continuidade de L segue do Lema da Colagem (A.1.1) com $A = [0, \frac{1}{2}]$ e $B = [\frac{1}{2}, 1]$. Assim $\alpha \sim_{x_0} \gamma$, logo $\sim_{x_0}$ é uma relação de equivalência. ■

Definição A.1.3. *Se α e β são caminhos em X com $\alpha(1) = \beta(0)$, então o caminho produto $\alpha * \beta$ é definido por*

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & se \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & se \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que a continuidade de $\alpha * \beta$ é uma consequência imediata do Lema da Continuidade (A.1.1). Pensando na variável t como tempo, um caminho α em X (ou melhor o seu traço) pode ser pensado como o deslocamento de um ponto começando em $\alpha(0)$ e traçando um caminho contínuo até $\alpha(1)$. Um produto $\alpha * \beta$ é então visualizado como segue: o ponto que se movimenta começa em $\alpha(0)$ e percorre o caminho α com o dobro da velocidade normal e chega em $\alpha(1)$ quando $t = \frac{1}{2}$. O ponto então percorre o caminho β com o dobro da velocidade normal e chega em $\beta(1)$ no tempo $t = 1$. Note que a condição $\alpha(0) = \beta(1)$ é necessária para que o produto de caminhos seja contínuo.

Lema A.1.2. *Suponha que α, α', β e β' são laços num espaço X, todos com ponto base x_0 e satisfazendo as relações $\alpha \sim_{x_0} \alpha'$ e $\beta \sim_{x_0} \beta'$. Então o produto $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$ são homotópicos, módulo x_0.*

Demonstração: Temos que $\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta' : I \longrightarrow X$ com $\alpha \sim_{x_0} \alpha'$ e $\beta \sim_{x_0} \beta'$. Então existem homotopias H e K tais que

$$\begin{array}{ll} H : I \times I \to X; & K : I \times I \to X; \\ H(\cdot, 0) = \alpha,\ H(\cdot, 1) = \alpha', & K(\cdot, 0) = \beta,\ K(\cdot, 1) = \beta', \\ H(0, s) = H(1, s) = x_0, & K(0, s) = K(1, s) = x_0. \end{array}$$

Agora queremos uma homotopia entre $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$. Tome $L : I \times I \longrightarrow X$ definida por

$$L(t, s) = \begin{cases} H(2t, s), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(2t - 1, s), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Temos então que

$$L(t, 0) = \begin{cases} H(2t, 0), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(2t - 1, 0), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (\alpha * \beta)(t),$$

e

$$L(t, 1) = \begin{cases} H(2t, 1), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(2t - 1, 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha'(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta'(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (\alpha' * \beta')(t).$$

■

Definição A.1.4. *Considere a família de laços em X com ponto base x_0. Homotopia módulo x_0 é uma relação de equivalência nesta família e além disso a particiona em classes de equivalências disjuntas. Denote por $[\alpha]$ a classe de equivalência determinada pelo laço α. A classe $[\alpha]$ é chamada a classe de homotopia de α. O conjunto de tais classes é denotado por $\pi_1(X, x_0)$. Se $[\alpha]$*

e $[\beta]$ pertencem à $\pi_1(X, x_0)$ então o produto $[\alpha] \circ [\beta]$ é definido como segue:

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta],$$

onde $\alpha * \beta$ indica o produto de caminhos. O lema anterior assegura que o produto $\circ$ está bem definido em $\pi_1(X, x_0)$, e o teorema seguinte mostra que $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo com a operação $\circ$. Tal grupo é chamado o grupo fundamental de X em x_0, ou o primeiro grupo de homotopia de X em x_0, ou ainda o grupo de Poincaré de X em x_0.

Teorema A.1.2. *O conjunto $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo com a operação $\circ$.*

Demonstração: Para mostrar que $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo temos que mostrar que: existe um laço c para o qual a sua classe $[c]$ é o elemento neutro para a operação $\circ$, que todo elemento $[\alpha]$ tem um simétrico, a saber $[\tilde{\alpha}] = [\alpha]^{-1}$, e que a multiplicação $\circ$ é associativa. Vamos provar cada uma dessas propriedades separadamente, através dos três lemas seguintes (lemas **(A), (B) e (C)**).

Lema A.1.3. (A) *$\pi_1(X, x_0)$ tem um elemento neutro $[c]$ onde c é o laço constante cujo único valor é x_0.*

Demonstração: O laço constante c é definido por $c(t) = x_0, \quad t \in I$. Se α é um laço em X baseado em x_0, então

$$(c * \alpha)(t) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Mostrar que $[c * \alpha] = [\alpha]$, requer uma homotopia $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$H(\cdot, 0) = c * \alpha, \qquad H(\cdot, 1) = \alpha,$$
$$H(0, s) = H(1, s) = x_0, \qquad s \in I.$$

Definindo

$$H(t, s) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \alpha(\dfrac{2t+s-1}{s+1}), & \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

Podemos ver que H satisfaz as condições da homotopia desejada pois

$$H(t, 0) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} = (c * \alpha)(t),$$

$$H(t, 1) = \begin{cases} x_0, & t = 0 \\ \alpha(t), & 0 \leq t \leq 1, \end{cases} = \alpha(t),$$

$$\text{e} \quad H(0,s) = x_0,\ H(1,s) = \alpha(1) = x_0.$$

Ainda, H é contínua pelo Lema da Continuidade (A.1.1) visto que $\dfrac{2t+s-1}{s+1}$ é uma aplicação contínua de (t,s) e as duas partes da definição de H coincidem quando $t = \dfrac{1-s}{2}$. Provamos então que se $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, então $[c] \circ [\alpha] = [c * \alpha] = [\alpha]$. Logo $[c]$ é um elemento neutro à esquerda de $\pi_1(X, x_0)$. Observemos que para obter a homotopia H, determinamos a equação da reta que passa pelos pontos $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0,1)$, obtendo $s = 1 - 2t$ ou $t = \dfrac{1-s}{2}$ e assim para s fixado, o ponto $(\dfrac{1-s}{2}, s)$.

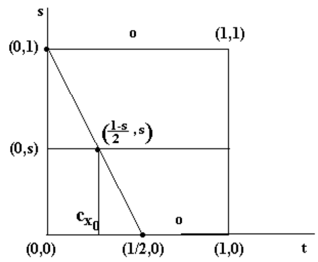
Consideramos então a aplicação

$$\begin{array}{rcl} [0, \frac{1-s}{2}] & \to & X \\ t & \mapsto & x_0 \end{array}$$

e a composta

$$\begin{array}{rcccl} [\frac{1-s}{2}, 1] & \longrightarrow & [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & \dfrac{2t+s-1}{s+1} & \mapsto & \alpha(\dfrac{2t+s-1}{s+1}), \end{array}$$

de acordo com o diagrama mostrado na figura seguinte:



Para ver que $[c]$ é também um elemento neutro à direita, isto é, que $[\alpha * c] = [\alpha]$ considere a homotopia definida por

$$H'(t,s) = \begin{cases} \alpha(\dfrac{2t}{s+1}), & 0 \le t \le \frac{s+1}{2} \\ x_0, & \frac{s+1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Para obter H', consideramos as aplicações

$$\begin{array}{rcccl} [0, \frac{s+1}{2}] & \longrightarrow & [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & \dfrac{2t}{s+1} & \mapsto & \alpha(\dfrac{2t}{s+1}) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} [\frac{s+1}{2}, 1] & \to & X \\ t & \mapsto & x_0. \end{array}$$

Das afirmações anteriores concluimos que $[c]$ é o elemento neutro para a operação $\circ$ em $\pi_1(X, x_0)$. ■

Lema A.1.4. (B) *Para cada classe de homotopia $[\alpha]$ em $\pi_1(X, x_0)$, o inverso de $[\alpha]$ com respeito à operação $\circ$ e o elemento neutro $[c]$ é a classe $[\alpha^{-1}]$ onde α^{-1} indica o caminho inverso (ou reverso) de α, $\alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t), \quad t \in I$.*

Demonstração: O caminho $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ (comumente chamado o inverso ou o reverso do caminho α) inicia em $\alpha(1) = x_0$ e percorre a mesma "rota"de α, porém no sentido contrário. Temos que provar que $[\alpha] \circ [\alpha^{-1}] = [c] = [\alpha^{-1}] \circ [\alpha]$, ou seja, $\alpha * \alpha^{-1} \sim c \sim \alpha^{-1} * \alpha$. Vejamos primeiro que $c \sim \alpha * \alpha^{-1}$. Note que

$$(\alpha * \alpha^{-1})(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2-2t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Grosseiramente falando, a homotopia H a ser definida será tal que, fixado $s \in [0,1]$:

- para $t \in [0, \frac{s}{2}]$, o caminho $H_s(t) := H(t,s)$ parte de $\alpha(0) = x_0$ e vai, via α, até $\alpha(s)$,
- para $t \in [\frac{s}{2}, 1 - \frac{s}{2}]$, o caminho fica "estacionado" em $\alpha(s)$ e,
- para $t \in [1 - \frac{s}{2}, 1]$ o caminho $H_s(t)$"parte de $\alpha(s) = \alpha^{-1}(1-s)$ e vai, via α^{-1}, até $\alpha^{-1}(1) = x_0$".

Assim, para $s \in [0,1]$ temos que considerar as aplicações:

$$\begin{array}{rcccl} [0, \frac{s}{2}] & \longrightarrow & [0, s] & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & 2t & \mapsto & \alpha(2t) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} [\frac{s}{2}, 1 - \frac{s}{2}] & \longrightarrow & \{s\} & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & s & \mapsto & \alpha(s) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} [1 - \frac{s}{2}, 1] & \longrightarrow & [1-s, 1] & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & 2t-1 & \mapsto & \alpha^{-1}(2t-1) \end{array}$$

A homotopia é então definida por

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(s), & \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ \alpha^{-1}(2t-1), & 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

Pelo Lema da Continuidade(A.1.1) H é contínua, e temos

$$H(t,0) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq 0 \\ \alpha(0) = x_0, & 0 \leq t \leq 1 \\ \alpha^{-1}(2t-1), & 1 \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(0) = x_0, \\ \alpha(0) = x_0, \\ \alpha^{-1}(1) = x_0, \end{cases} = c(t), \quad \forall t,$$

$$H(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(1), & t = \frac{1}{2} \\ \alpha^{-1}(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} = (\alpha * \alpha^{-1})(t),$$

$$\text{e} \quad H(0,s) = \alpha(0) = x_0, \quad H(1,s) = \alpha^{-1}(1) = x_0.$$

Logo $c \sim \alpha * \alpha^{-1}$, ou seja, $[c] = [\alpha * \alpha^{-1}] = [\alpha] \circ [\alpha^{-1}]$.

Analogamente, tomando o homotopia $H' : I \times I \longrightarrow X$ definida por

$$H'(t,s) = \begin{cases} \alpha^{-1}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha^{-1}(s), & \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ \alpha(2t-1), & 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

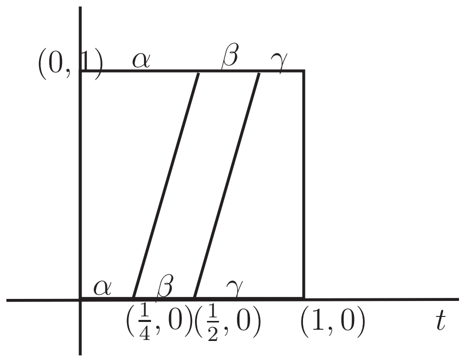
temos que $c \sim \alpha^{-1} * \alpha$, isto é $[c] = [\alpha^{-1} * \alpha] = [\alpha^{-1}] \circ [\alpha]$. Portanto a classe $[\alpha^{-1}]$ é o elemento simétrico de $[\alpha]$ em $\pi_1(X, x_0)$. ■

Lema A.1.5. (C) *A operação $\circ$ é associativa.*

Demonstração: Sejam $[\alpha], [\beta]$ e $[\gamma]$ membros de $\pi_1(X, x_0)$. Queremos provar que $([\alpha] \circ [\beta]) \circ [\gamma] = [\alpha] \circ ([\beta] \circ [\gamma])$, ou equivalentemente, $[(\alpha * \beta) * \gamma] = [\alpha * (\beta * \gamma)]$.

Sabemos que

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} (\alpha * \beta)(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$



$$(\alpha*(\beta*\gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\beta*\gamma)(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Para um s fixo, consideremos as aplicações

$$\begin{array}{ccccc} [0, \frac{s+1}{4}] & \longrightarrow & [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & \dfrac{4t}{s+1} & \mapsto & \alpha(\dfrac{4t}{s+1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} [\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}] & \longrightarrow & [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & 4t-(s+1) & \mapsto & \beta(4t-(s+1)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} [\frac{s+2}{4}, 1] & \longrightarrow & [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & \dfrac{4t-(s+2)}{2-s} & \mapsto & \gamma(\dfrac{4t-(s+2)}{2-s}) \end{array}$$

Defina então $H : I \times I \longrightarrow X$ por

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(\dfrac{4t}{s+1}), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \beta(4t-(s+1)), & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \gamma(\dfrac{4t-(s+2)}{2-s}), & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Temos que H é contínua e satisfaz

$$H(t,0) = \begin{cases} \alpha(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t+1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} = ((\alpha*\beta)*\gamma)(t),$$

$$H(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(\dfrac{4t-3}{3}), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases} = (\alpha * (\beta * \gamma))(t),$$

$$\text{e} \quad H(0,s) = \alpha(0) = x_0,\ H(1,s) = \gamma(1) = x_0.$$

Logo $((\alpha * \beta) * \gamma) \sim (\alpha * (\beta * \gamma))$. Isto completa a prova que $\circ$ é associativa e prova finalmente que $(\pi_1(X, x_0), \circ)$ é um grupo, como afirmado. ■

Definição A.1.5. *Um espaço X é conexo por caminhos se cada par de pontos de X pode ser ligado por um caminho. Em outras palavras, se x_0 e x_1 são pontos em X então existe um caminho em X com ponto inicial x_0 e ponto final x_1.*

O resultado seguinte nos mostra que o grupo fundamental de um espaço conexo por caminhos independe do ponto base.

Teorema A.1.3. *Se um espaço X é conexo por caminhos e x_0 e x_1 são pontos de X, então os grupos $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.*

Demonstração: Seja $\rho : I \longrightarrow X$ um caminho tal que $\rho(0) = x_0$ e $\rho(1) = x_1$. Se α é um laço baseado em x_0, então $(\rho^{-1} * \alpha) * \rho$ é um laço baseado em x_1 onde ρ^{-1} denota o caminho reverso de ρ:

$$\rho^{-1}(t) = \rho(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Definimos uma aplicação $P : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$ por $P([\alpha]) = [(\rho^{-1} * \alpha) * \rho]$, $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Pode-se verificar que a imagem de uma classe $[\alpha]$ em $\pi_1(X, x_0)$ é independente da escolha do caminho α que representa a classe, e então P está bem definida. Para mostrarmos que P é um isomorfismo algumas observações são necessárias. Primeiro: O Lema (**B**) mostra que $[\rho * \rho^{-1}]$ e $[\rho^{-1} * \rho]$ são os elementos neutros de $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$, respectivamente. Segundo: O Lema (**C**) pode ser facilmente modificado para mostrar que quaisquer caminhos (não necessariamente fechados) α, β, γ, para os quais $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$ estão definidos, os produtos triplos indicados são equivalentes. Assim em $[(\rho^{-1} * \alpha) * \rho]$, podemos ignorar o parêntese interior e simplesmente escrever $[\rho^{-1} * \alpha * \rho]$, já que a classe de equivalência é a mesma independente do modo em que os termos do produto são associados. Agora considere $[\alpha]$ e $[\beta]$ em $\pi_1(X, x_0)$, então

$$\begin{aligned} P([\alpha] \circ [\beta]) &= P([\alpha * \beta]) = [\rho^{-1} * \alpha * \beta * \rho] = [\rho^{-1} * \alpha * \rho * \rho^{-1} * \beta * \rho] \\ &= [\rho^{-1} * \alpha * \rho] \circ [\rho^{-1} * \beta * \rho] = P([\alpha]) \circ P([\beta]). \end{aligned}$$

Logo P é homomorfismo. Agora, a aplicação $Q : \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ definida por $Q([\sigma]) = [\rho * \sigma * \rho^{-1}]$, $[\sigma] \in \pi_1(X, x_1)$ é a inversa de P. De fato, para $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, $Q(P([\alpha])) = Q([\rho^{-1} * \alpha * \rho]) = [\rho * \rho^{-1} * \alpha * \rho * \rho^{-1}] = [\rho * \rho^{-1}] \circ [\alpha] \circ [\rho * \rho^{-1}] = [\alpha]$. Então a composta $Q \circ P$ é a aplicação identidade sobre $\pi_1(X, x_0)$, e por simetria, observamos que a composta $P \circ Q$ é a identidade sobre $\pi_1(X, x_1)$. Logo os grupos fundamentais indicados são isomorfos. ■

Por causa do teorema anterior, a menção à um ponto base para o grupo fundamental de um espaço conexo por caminhos é, às vezes, omitida. Vamos em geral nos referir ao "grupo fundamental de X" e escrever $\pi_1(X)$ quando X for conexo por caminhos, já que o mesmo grupo abstrato será obtido independente da escolha do ponto base. O teorema não garante, no entanto, que o isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ é único; caminhos diferentes podem conduzir à isomorfismos diferentes. Há situações em que é importante especificar o ponto base. Quando comparamos, por exemplo, grupos fundamentais de dois espaços X e Y através uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$, é necessário especificar o ponto base de cada espaço.

A.2 O Grupo Fundamental de S^1

Esta seção é dedicada a determinar o grupo fundamental do círculo unitário. Será conveniente considerar o círculo unitário S^1 como um subconjunto do plano complexo. Vamos considerar $\mathbb{R}^2$ como o conjunto de todos os complexos $x = x_1 + ix_2$, onde $i = \sqrt{-1}$. Assim $S^1 = \{x + yi;\ \ x^2 + y^2 = 1\}$. Considere a aplicação $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ definida por

$$p(t) = exp(2\pi it), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aqui exp denota a aplicação exponencial no plano complexo. Em particular, se $t \in \mathbb{R}$, então

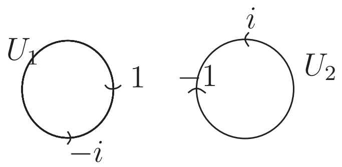
$$exp(2\pi it) = \cos(2\pi t) + i(\text{sen}(2\pi t)).$$

Note que p leva cada inteiro $n \in \mathbb{R}$ em $1 \in S^1$ e envolve cada intervalo $[n, n+1)$ exatamente uma vez em torno de S^1 no sentido anti-horário.

Definição A.2.1. *Se $\sigma : I \longrightarrow S^1$ é um caminho, então um caminho $\tilde{\sigma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$ é chamado um levantamento do caminho σ para a reta real $\mathbb{R}$. Se $F : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma homotopia, então uma homotopia $\tilde{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \circ \tilde{F} = F$, é chamada um levantamento de F.*

Teorema A.2.1. (*Propriedade do Levantamento de Caminhos*) *Se $\sigma : I \longrightarrow S^1$ é um caminho em S^1 com ponto inicial 1, então existe um único levantamento $\tilde{\sigma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que o ponto inicial é 0.*

Demonstração: Seja U_1 o arco aberto em S^1 começando em 1 e caminhando no sentido anti-horário até $-i$, e seja U_2 o arco aberto de -1 até i, no sentido anti-horário, como mostra a figura.



Então U_1 e U_2 são conjuntos abertos em S^1, $U_1 \cup U_2 = S^1$ e

$$p^{-1}(U_1) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (n, n + \frac{3}{4}), \quad p^{-1}(U_2) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{4}).$$

Note que p leva cada intervalo $(n, n + \frac{3}{4})$ homeomorficamente sobre U_1 e cada intervalo $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{4})$ homeomorficamente sobre U_2.

Daremos uma idéia intuitiva da prova. Subdivida o domínio do caminho σ em seções tais que cada seção está contida em U_1 ou U_2. Se uma seção particular está contida em U_1, escolhemos um dos intervalos $V = (n, n + \frac{3}{4})$ e consideramos a restrição $p\,|_V$. A composição de $(p\,|_V)^{-1}$ com esta seção do caminho "levanta"a seção para uma seção de um caminho em $\mathbb{R}$. O mesmo método se aplica para seções que estão em U_2. Para garantir a continuidade nós precisamos ter cuidado para que o ponto inicial de uma dada seção levantada seja o ponto final da seção levantada anteriormente.

Este método é aplicado indutivamente como segue. Seja ε o número de Lebesgue para uma cobertura aberta $\{\sigma^{-1}(U_1), \sigma^{-1}(U_2)\}$ de I. Escolha uma seqüência $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ de números em I tal que cada par sucessivo difere de pelo menos ε. Então a imagem $\sigma([t_i, t_{i+1}])$ de um subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$, $\;0 \leq i \leq n-1$, deve estar contido em U_1 ou U_2.

Agora, $\sigma([t_0, t_1])$ deve estar contido em U_2 pois $\sigma(t_0) = \sigma(0) = 1 \notin U_1$. Seja $V_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ e defina $\tilde{\sigma}$ em $[t_0, t_1]$ por

$$\tilde{\sigma}(t) = (p\,|_{V_1})^{-1}\sigma(t).$$

Procedendo indutivamente, suponha que σ foi definido sobre o intervalo $[t_0, t_k]$. Então $\sigma([t_k, t_{k+1}]) \subset U$ onde U está em U_1 ou U_2. Seja V_{k+1} a componente de $p^{-1}(U)$ onde $\tilde{\sigma}(t_k)$ pertence. Note que V_{k+1} é um dos intervalos $(n, n+\frac{3}{4})$ ou $(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{4})$. Então $p\,|_{V_{k+1}}$ é um homeomorfismo, e a extensão de $\tilde{\sigma}$ para $[t_k, t_{k+1}]$ é obtida definindo

$$\tilde{\sigma}(t) = (p\,|_{V_{k+1}})^{-1}(\sigma(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

A continuidade de $\tilde{\sigma}$ é garantida pelo Lema da Continuidade pois as seções levantadas concordam nos pontos finais t_k. Esse passo indutivo estende a definição de $\tilde{\sigma}$ para $[t_0, t_n] = I$.

Para provar que $\tilde{\sigma}$ é um levantamento único suponha que σ' também satisfaz $p \circ \sigma' = \sigma, e\ \sigma'(0) = 0$. Então o caminho $\tilde{\sigma} - \sigma'$ tem ponto inicial 0 e

$$p(\tilde{\sigma}(t) - \sigma'(t)) = p(\tilde{\sigma}(t))/p(\sigma'(t)) = \sigma(t)/\sigma(t) = 1, \quad t \in I,$$

então $\tilde{\sigma} - \sigma'$ é um levantamento do caminho constante cujo único valor é 1. Como p aplica somente inteiros para 1, então $\tilde{\sigma} - \sigma$ tem somente valores inteiros. Assim, como I é conexo, $\tilde{\sigma} - \sigma'$ pode ter somente um valor inteiro. Este único valor deve ser um valor inicial, 0. Além disso, $\tilde{\sigma} - \sigma' = 0$, assim $\tilde{\sigma} = \sigma'$. O requerido levantamento $\tilde{\sigma}$ é então único. ■

Corolário A.2.1. (*Propriedade do Levantamento de Caminho Generalizada*) *Se σ é um caminho em S^1 e r é um número real tal que $p(r) = \sigma(0)$, então existe um único levantamento $\tilde{\sigma}$ de σ com ponto inicial r.*

Demonstração: O caminho $\sigma/\sigma(0)$ é um caminho em S^1 com ponto inicial $\sigma(0)/\sigma(0) = 1$ e além disso tem um único levantamento η com ponto inicial 0. O caminho $\tilde{\sigma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\tilde{\sigma}(t) = r + \eta(t), \quad t \in I$, é o requerido levantamento de σ com ponto inicial r. A unicidade de $\tilde{\sigma}$ segue da unicidade de η. ■

Proposição A.2.1. (*Propriedade do Levantamento de Homotopia*) *Se $F : I \times I \longrightarrow S^1$ é uma homotopia tal que $F(0,0) = 1$, então existe um único levantamento de homotopia $\tilde{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{F}(0,0) = 0$.*

Demonstração: A prova é similar à do teorema anterior. ■

Definição A.2.2. *Seja α um laço em S^1 com ponto inicial 1. A propriedade do levantamento de caminho garante que existe exatamente um levantamento*

$\tilde{\alpha}$ de α com ponto inicial 0. Como,

$$1 = \alpha(1) = p(\tilde{\alpha}(1)) = exp(2\pi i\tilde{\alpha}(1)),$$

então $\tilde{\alpha}(1)$ é um inteiro. Este inteiro é chamado o grau do laço α.

Proposição A.2.2. *Dois laços α e β em S^1 com pontos bases 1, são equivalentes se, e somente se, eles têm o mesmo grau.*

Demonstração: Sejam $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ os levantamentos de α e β, respectivamente, tendo ponto inicial 0 em $\mathbb{R}$. Suponha primeiro que α e β têm o mesmo grau então $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Defina uma homotopia $H : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$H(t,s) = (1-s)\tilde{\alpha}(t) + s\tilde{\beta}(t), \quad (t,s) \in I \times I.$$

Então H demonstra a equivalência de $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ como caminhos em $\mathbb{R}$. Note, em particular, que $H(1,s)$ é o grau comum de α e β para cada s em I. A homotopia

$$p \circ H : I \times I \longrightarrow S^1$$

mostra a equivalência de α e β como laços em S^1.

Suponha agora que α e β são laços equivalentes em S^1 e que $K : I \times I \longrightarrow S^1$ é uma homotopia tal que

$$K(\cdot,0) = \alpha, K(\cdot,1) = \beta, K(0,s) = K(1,s) = 1, s \in I.$$

Pela propriedade do levantamento de homotopia existe $\tilde{K} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{K}(0,0) = 0$ e $p \circ \tilde{K} = K$. Então $(p \circ \tilde{K})(0,s) = K(0,s) = 1, \quad s \in I$. Segue que $\tilde{K}(0,s)$ é um inteiro para cada valor de s. Como I é conexo, $\tilde{K}(0,\cdot)$ tem somente o valor $\tilde{K}(0,0) = 0$. Um argumento similar mostra que $\tilde{K}(1,\cdot)$ é uma aplicação constante. Como $(p \circ \tilde{K})(\cdot,0) = K(\cdot,0) = \alpha$ e $(p \circ \tilde{K})(\cdot,1) = K(\cdot,1) = \beta$ então $\tilde{K}(\cdot,0) = \tilde{\alpha}$ e $\tilde{K}(\cdot,1) = \tilde{\beta}$ são os únicos levantamentos de α e β, respectivamente, com ponto inicial 0. Assim

$$grau(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{K}(1,0) = \tilde{K}(1,1) = \tilde{\beta}(1) = grau(\beta),$$

e portanto α e β têm o mesmo grau. ■

Teorema A.2.2. *O grupo fundamental $\pi_1(S^1)$ é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos inteiros.*

Demonstração: Considere $\pi_1(S^1,1)$, e defina a aplicação

$$deg : \pi_1(S^1,1) \longrightarrow \mathbb{Z}; \ [\alpha] \rightarrow deg([\alpha]) := grau(\alpha).$$

A proposição anterior garante que deg está bem definida e é injetora. Vejamos que deg leva $\pi_1(S^1,1)$ sobre $\mathbb{Z}$. Seja n um inteiro. O laço γ em S^1 definido por $\gamma(t) = exp(2\pi int)$ é coberto pelo caminho $t \mapsto nt, \ t \in I$, e além disso tem grau n. Então $deg([\gamma]) = n$. Suponha que $[\alpha]$ e $[\beta]$ estão em $\pi_1(S^1,1)$.

Mostremos agora que $deg([\alpha]\circ[\beta]) = deg([\alpha])+deg([\beta])$. Se $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são os únicos levantamentos de $[\alpha]$ e $[\beta]$ que começam em 0, então o caminho $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é o levantamento de $\alpha * \beta$ com ponto inicial 0. Assim $grau(\alpha * \beta) = f(1) = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1) = grau(\alpha) + grau(\beta)$, e portanto,

$deg([\alpha]\circ[\beta]) = grau(\alpha * \beta) = grau(\alpha) + grau(\beta) = deg([\alpha]) + deg([\beta])$. ■

A.3 Homomorfismo Induzido e Equivalência de Homotopia

Nesta seção estudaremos inicialmente o efeito, no grupo fundamental, de uma aplicação contínua entre dois espaços. Veremos também que o grupo fundamental é um invariante topológico. A seguir examinaremos uma relação de equivalência para espaços topológicos que foi introduzida por Hurewicz em 1936. Tal relação é mais fraca do que homeomorfismo, mas forte o suficiente para garantir que espaços equivalentes têm grupos fundamentais isomorfos.

Definição A.3.1. *Dados X e Y espaços, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua tal que $f(x_0) = y_0$. Então f induz uma aplicação bem definida $f_\# : \pi_1(X,\ x_0) \to \pi_1(Y,\ y_0)$ dada por $f_\#([\alpha]) = [f \circ \alpha]$, que é um homomorfismo. Tal homomorfismo é chamado homomorfismo induzido pela aplicação f em π_1.*

Para verificar que $f_\#$ está bem definida, temos que mostrar que $\alpha \sim \beta$ implica $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$. Mas de $\alpha \sim \beta$, segue que existe uma homotopia $H : I \times I \to X$ entre α e β, relativamente a x_0. Definimos então a aplicação $K : I \times I \to Y$ por $K = f \circ H$. Claramente K é uma homotopia entre $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$ relativamente a $f(x_0)$. Logo $f_\#$ está bem definida. Além disso $f_\#$ é um homomorfismo de grupos. De fato, temos que

$$(f\circ(\alpha*\beta))(t) = \begin{cases} (f \circ \alpha)(2t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ (f \circ \beta)(2t-1), & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (f\circ\alpha)*(f\circ\beta)(t).$$

e se $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ então $f_\#([\alpha]\circ[\beta]) = f_\#([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] =$

$[(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] \circ [f \circ \beta] = f_{\#}([\alpha]) \circ f_{\#}([\beta])$, o que prova que $f_{\#}$ é realmente um homomorfismo.

Proposição A.3.1. a) *Se $f : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ é a aplicação identidade, isto é, $f = id_X$, então $f_{\sharp} = id_{\pi_1(X,x_0)}$.*

b) *Se $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ são aplicações contínuas sobre os pares indicados, então o homomorfismo induzido $(g \circ f)_{\sharp}$ é o homomorfismo composto $g_{\sharp} \circ f_{\sharp} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Z, z_0)$.*

c) *(Invariância Topológica) Se $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ é um homeomorfismo então o homomorfismo induzido por h, $h_{\sharp} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ é um isomorfismo.*

Demonstração:

a) Se $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, então $(id_X)_{\sharp}([\alpha]) = [id_X \circ \alpha] = [\alpha] = id_{\pi_1(X,x_0)}([\alpha])$

b) Seja $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, então $(g \circ f)_{\sharp}([\alpha]) = [(g \circ f)(\alpha)] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_{\sharp}([f \circ \alpha]) = g_{\sharp}(f_{\sharp}([\alpha])) = (g_{\sharp} \circ f_{\sharp})([\alpha])$. Assim, $(g \circ f)_{\sharp} = g_{\sharp} \circ f_{\sharp}$.

c) Suponha que $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ seja um homeomorfismo e considere $h^{-1} : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ a inversa de h. Então para $[\alpha]$ em $\pi_1(X, x_0)$ temos,

$((h^{-1})_{\sharp} \circ h_{\sharp})([\alpha]) = ((h^{-1}) \circ h)_{\sharp}([\alpha]) = (id_X)_{\sharp}([\alpha]) = id_{\pi_1(X,x_0)}([\alpha]) = [\alpha]$.

Similarmente, para $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$ temos $(h_{\sharp} \circ (h^{-1})_{\sharp})([\alpha]) = id_{\pi_1(Y,y_0)}([\alpha])$.

Logo, $(h_{\sharp})^{-1} = (h^{-1})_{\sharp}$.

Antes de definirmos espaços *homotopicamente equivalentes* ou espaços com mesmo tipo de homotopia, apresentamos o conceito seguinte que é uma extensão natural do conceito de homotopia de caminhos.

Definição A.3.2. *Sejam X e Y espaços topológicos e f e g aplicações contínuas de X em Y, dizemos que f é homotópica a g relativamente a um subconjunto $A \subset X$ se existe uma aplicação contínua $H : X \times [0, 1] \to Y$ tal que para todo $x \in X$, temos $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$ e $H(a, t) = f(a) = g(a), \forall\ a \in A$ e $\forall\ t \in [0, 1]$. A aplicação H é chamada uma homotopia entre f e g. Denota-se $f \sim g$ para indicar que f é homotópica a g.*

Observação A.3.1. *Quando na segunda condição tivermos $A = \emptyset$, dizemos que f e g* são livremente homotópicas *ou apenas* homotópicas*.*

Definição A.3.3. *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que X e Y são homotopicamente equivalentes, ou têm o mesmo tipo de homotopia, se existem aplicações contínuas $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ para as quais as compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ são homotópicas às aplicações identidades sobre X e Y, respectivamente. A aplicação f é chamada uma equivalência de homotopia, e g é chamada a inversa homotópica para f. Escreve-se $X \equiv Y$ ou $X \sim Y$ para indicar que X e Y são homotopicamente equivalentes.*

Exemplo A.3.1. *Espaços homeomorfos são claramente homotopicamente equivalentes.*

Proposição A.3.2. *A relação "X é homotopicamente equivalente à Y" é uma relação de equivalência para espaços topológicos.*

Demonstração: A relação é reflexiva pois a aplicação identidade sobre qualquer espaço X é uma equivalência de homotopia. A propriedade simétrica está implícita na definição. Note que ambas, f e g, são equivalências de homotopias e que cada uma delas é uma inversa homotópica para a outra. Vejamos que a relação é transitiva: sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $h : Y \longrightarrow Z$ equivalências de homotopia com inversas homotópicas $g : Y \longrightarrow X$ e $k : Z \longrightarrow Y$, respectivamente. Queremos mostrar que X e Z têm o mesmo tipo de homotopia. A candidata para uma equivalência de homotopia entre X e Z é a aplicação composta $h \circ f$, tendo $g \circ k$ como inversa homotópica. Seja $L : Y \times I \longrightarrow Y$ uma homotopia tal que $L(\cdot,\ 0) = k \circ h$ e $L(\cdot,\ 1) = id_Y$. Então $M : X \times I \longrightarrow X$, definida por $M(x,t) = g(L(f(x),t)),\ (x,t) \in X \times I$, é uma homotopia tal que

$$\begin{array}{l} M(\cdot,0) = g(L(f(\cdot),0)) = g((k \circ h)(f)) = g \circ k \circ h \circ f = (g \circ k) \circ (h \circ f), \\ M(\cdot,1) = g(L(f(\cdot),1)) = g(f) = g \circ f. \end{array}.$$

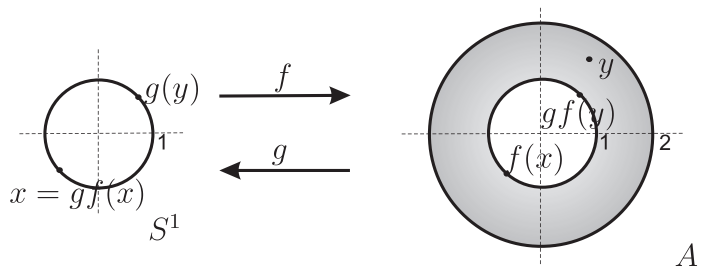
Assim $((g \circ k) \circ (h \circ f))$ é homotópica à $g \circ f$ e conseqüentemente à aplicação identidade sobre X, uma vez que g é uma inversa homotópica de f.

Um argumento completamente análogo mostra que $((h \circ f) \circ (g \circ k))$ é homotópica à $h \circ k$, e portanto à identidade sobre Z e assim X e Z têm o mesmo tipo de homotopia. ■

Exemplo A.3.2. *Um círculo e um anel têm o mesmo tipo de homtopia. Para ver isto, considere o círculo unitário S^1 e o anel*

$$A = \{y \in \mathbb{R}^2; 1 \leq |y| \leq 2\}$$

como na figura.



Uma equivalência de homotopia $f : S^1 \longrightarrow A$ *e uma inversa homotópica* $g : A \longrightarrow S^1$ *são, respectivamente, definidas por*

$$f(x) = x, x \in S^1; \quad g(y) = y/|y|, y \ \in A \qquad .$$

Então $g \circ f$ *é a identidade sobre* S^1*,*

$$g \circ f : S^1 \to A \to S^1; \quad x \mapsto x \mapsto x/|x| = x \quad e,$$

$$f \circ g : A \to S^1 \to A; \ y \mapsto y/|y| \mapsto y/|y|.$$

A homotopia entre $f \circ g$ *e a identidade em* A *é então dada por* $H(y, t) = ty + (1 - t)y/|y|$, *pois* $H(y, 0) = y/|y| = (f \circ g)(y)$ *e* $H(y, 1) = y = id_A(y)$. *Logo* $f \circ g \sim id_A$ *via a aplicação* H *e portanto* S^1 *tem o mesmo tipo de homotopia do anel* A.

Definição A.3.4. *Um espaço* X *é contráctil se existe um ponto* $x_0 \in X$ *e uma homotopia* $H : X \times I \longrightarrow X$ *entre* id_X *e a aplicação constante* x_0*, isto é,* H *é tal que*

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = x_0, \quad x \in X.$$

A homotopia H *é chamada contração do espaço* X.

Proposição A.3.3. *Um espaço* X *é contráctil se, e somente se, tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.*

Demonstração: Suponha que X é contráctil, isto é, existe $x_0 \in X$ e uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow X$ entre id_X e a aplicação constante x_0:

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = x_0, \quad x \in X.$$

Então X tem o mesmo tipo de homotopia que o espaço $\{x_0\}$ pela equivalência de homotopia $f : X \longrightarrow \{x_0\}$ e inversa homotópica $g : \{x_0\} \longrightarrow X$ definidas por

$$f(x) = x_0, \quad g(x_0) = x_0, \quad x \in X.$$

Suponha agora que $f' : X \longrightarrow \{a\}$ é uma equivalência de homotopia entre X e o espaço com um ponto $\{a\}$ com inversa homotópica $g' : \{a\} \longrightarrow X$. Então existe uma homotopia $K : X \times I \longrightarrow X$ entre $g' \circ f'$ e a identidade em X, $\;K(x,0) = x,\;\; K(x,1) = (g' \circ f')(x) = g'(a),\;\; x \in X$.

A homotopia K é então uma contração, e X é contráctil. ■

Definição A.3.5. *Seja X um espaço e A em subespaço de X. Dizemos que A é um retrato por deformação de X (ou que X retrai por deformação sobre A) se existe uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow X$ tal que*

$$\begin{aligned} &H(x,0) = x, \quad H(x,1) \in A, \quad x \in X \\ &H(a,t) = a, \;\; a \in A, t \in I. \end{aligned}$$

A homotopia H é chamada deformação retrátil.

Proposição A.3.4. *Se X é um espaço e A é um retrato por deformação de X, então A e X têm o mesmo tio de homotopia.*

Demonstração: Existe uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} &H(x,0) = x, \quad H(x,1) \in A, \quad x \in X, \\ &H(a,t) = a, \qquad a \in A, \qquad t \in I. \end{aligned}$$

Seja $f : A \longrightarrow X$ a aplicação inclusão $f(a) = a$, e defina $g : X \longrightarrow A$ por $g(x) = H(x,1),\;\; x \in X$. Então $g \circ f$ é a identidade sobre A, e H é uma homotopia entre $f \circ g$ e a identidade sobre X, assim f é uma equivalência de homotopia com g como inversa homotópica. ■

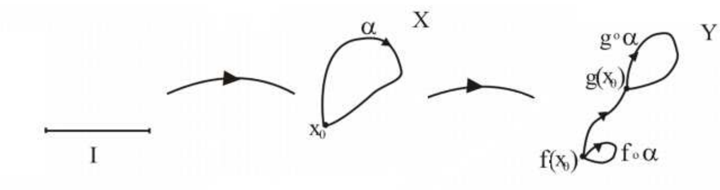
Considere agora X e Y espaços topológicos *conexos por caminhos* e sejam $f, g : X \to Y$ aplicações contínuas tais que f é homotópica a g. Seja $H : X \times I \to Y$ uma homotopia entre f e g. Então $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x), \forall x \in X$ e, como vimos, f e g induzem homomorfismos $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ e $g_{\#} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, g(x_0))$. Seja $\gamma : I \to Y$ definido por $\gamma(t) = H(x_0, t)$. Temos que $\gamma(0) = f(x_0)$ e $\gamma(1) = g(x_0)$. Assim, γ é um caminho em Y ligando $f(x_0)$ a $g(x_0)$. Logo, γ induz um isomorfismo $\gamma_{\#} : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, g(x_0))$ tal que $\gamma_{\#}([\beta]) = [\gamma^{-1} * \beta * \gamma]$. Temos então o seguinte resultado:

Lema A.3.1. *Nas hipóteses acima temos que $g_{\#} = \gamma_{\#} \circ f_{\#}$. Isto é, o diagrama*

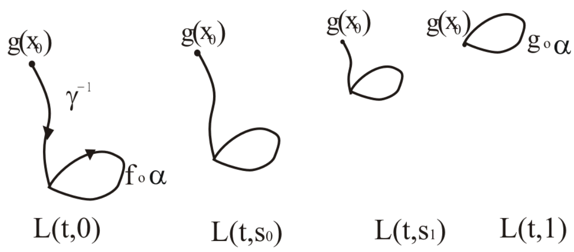
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(Y,f(x_0)) \\ & \searrow^{g_\#} & \downarrow^{\gamma_\#} \\ & & \pi_1(Y,g(x_0)) \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração: Seja $[\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$. Queremos mostrar que $g_\#([\alpha]) = (\gamma_\# \circ f_\#)([\alpha])$, isto é $[(g\circ\alpha)] = [\gamma^{-1} * (f\circ\alpha) * \gamma]$. Para isto temos que exibir uma homotopia $K : I \times I \to Y$ entre $(g\circ\alpha)$ e $(\gamma^{-1} * (f\circ\alpha) * \gamma)$ relativamente a $g(x_0)$. Definimos $K : I\times I \to Y$ por $K(t,s) = H(\alpha(t),s)$. Assim, temos que K satisfaz $K(t,0) = H(\alpha(t),0) = (f\circ\alpha)(t)$, $K(t,1) = H(\alpha(t),1) = (g\circ\alpha)(t)$, $K(0,s) = H(\alpha(0),s) = H(x_0,s) = \gamma(s) = K(1,s)$. Portanto, $K(0,s) = K(1,s)$ mas não é igual a uma constante, para todo s pertencente a I.



"Deformando" K como indicado na figura seguinte poderemos exibir uma homotopia L entre $g\circ\alpha$ e $\gamma^{-1} * (f\circ\alpha) * \gamma$, como desejado:



Temos que

$$(\gamma^{-1} * (f\circ\alpha) * \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t), & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f\circ\alpha(4t-2), & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3), & \text{se } \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

Seja $s \in [0,1]$. Para $t \in [0, \dfrac{(1-s)}{2}]$ a homotopia L parte de $\gamma^{-1}(0) = \gamma(1) = g(x_0)$ e vai até $\gamma^{-1}(1-s) = \gamma(s)$. Para $t \in [\dfrac{(1-s)}{2}, \dfrac{(s+3)}{4}]$ temos a composição:

$$\begin{array}{ccccc} [\frac{(1-s)}{2}, \frac{(s+3)}{4}] & \longrightarrow & [0,1] & \longrightarrow & Y \\ t & \to & \dfrac{(4t+2s-2)}{(3s+1)} & \to & K(\dfrac{(4t+2s-2)}{(3s+1)}, s) \end{array}$$

Para $t \in [\frac{(s+3)}{4}, 1]$ a homotopia L parte de $\gamma(s)$ e vai até $g(x_0)$.
Logo, a homotopia L é dada por

$$L(t,s) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \dfrac{1-s}{2} \\ K(\frac{4t+2s-2}{3s+1}, s), & \text{se } \dfrac{1-s}{2} \leq t \leq \dfrac{s+3}{4} \\ \gamma(4t-3), & \text{se } \dfrac{s+3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que, para $0 \leq t \leq 1$,

$$L(t,0) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(4t-2, 0), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3), & \text{se } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} = (\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma)(t),$$

$L(t,1) = K(t,1) = (g \circ \alpha)(t)$, e $L(0,s) = L(1,s) = g(x_0)$. ■

Teorema A.3.1. *Sejam X e Y espaços topológicos conexos por caminhos. Se X e Y têm o mesmo tipo de homotopia, então $\pi_1(X)$ é isomorfo a $\pi_1(Y)$, mais precisamente, se $f : X \to Y$ é uma equivalência de homotopia, então $f_\# : \pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, f(x_0))$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Considere $f : X \to Y$ uma equivalência de homotopia. Então existe $g : Y \to X$ (a inversa homotópica) tal que $f \circ g \sim id_Y$ e $g \circ f \sim id_X$. Sejam $y_0 \in Y$ e $x_0 = g(y_0)$. Vamos mostrar que $f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ é um isomorfismo. Temos $g_\# : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(X, g(f(x_0)))$. Além disso, pelo lema, $(f \circ g)_\# = \gamma_\# \circ (id_Y)_\#$ e $(g \circ f)_\# = \sigma_\# \circ (id_X)_\#$, onde γ é um caminho ligando y_0 a $f(x_0)$ e σ é um caminho ligando x_0 a $g(f(x_0))$.

Mas, $(f \circ g)_\# = f_\# \circ g_\#$, $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$, $(id_Y)_\# = id_{\pi_1(Y, y_0)}$ e, $(id_X)_\# = id_{\pi_1(X, x_0)}$.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_\#"] \arrow[rr, bend left, "(g \circ f)_\sharp"] \arrow[dr, "(id_X)_\#"'] & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[r, "g_\#"] & \pi_1(X, g(f(x_0))) \\ & \pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "\sigma_\#"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "g_\#"] \arrow[rr, bend left, "(f\circ g)_\sharp"] \arrow[dr, "(id_Y)_\#"'] & \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_\#"] & \pi_1(Y,f(x_0)) \\
 & \pi_1(Y,y_0) \arrow[ur, "\gamma_\#"'] &
\end{tikzcd}$$

Assim,

$g_\# \circ f_\# = \sigma_\# \circ id_{\pi_1(X,x_0)}$ (1)

$f_\# \circ g_\# = \gamma_\# \circ id_{\pi_1(Y,y_0)}$ (2)

De (1), concluímos que $f_\#$ é injetora e de (2) obtemos que $f_\#$ é sobrejetora. Logo, $f_\#$ é um isomorfismo entre $\pi_1(X,x_0)$ e $\pi_1(Y,f(x_0))$. Como X e Y são conexos por caminhos, o isomorfismo independe do ponto base. ■

Como uma primeira consequência obtemos a invariância topológica já mencionada.

Corolário A.3.1. *Se X e Y são espaços topológicos conexos por caminhos com X homeomorfo a Y então $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$.*

Demonstração: Segue do Exemplo A.3.1. ■

Corolário A.3.2. *Se A é um retrato por deformação de um espaço X e x_0 é um ponto de A então a aplicação de $\pi_1(X,x_0)$ em é $\pi_1(A,x_0)$ induzida da inclusão é um isormorfismo.*

Demonstração: Segue do teorema anterior e da Proposição A.3.4. ■

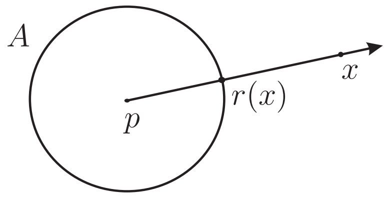
Definição A.3.6. *Um espaço X conexo por caminhos é simplesmente conexo quando $\pi_1(X)$ é o grupo trivial.*

Corolário A.3.3. *Todo espaço contráctil é simplesmente conexo.*

Demonstração: Segue do fato que o espaço contráctil tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto e do teorema anterior. ■

A.4 Exemplos de Grupos Fundamentais e o Teorema de Van Kampen

Exemplo A.4.1. *Considere o plano $\mathbb{R}^2 \backslash \{p\}$ consistindo de todos os pontos em $\mathbb{R}^2$ exceto um ponto particular p. Seja A um círculo com centro p, como na figura:*



Para $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{p\}$*, a linha que vai de* p *até* x *intersepta o círculo* A *no ponto* $r(x)$*. Esta aplicação* r *é claramente uma retração de* $\mathbb{R}^2 \backslash \{p\}$ *em* A*. Defina uma homotopia* $H : (\mathbb{R}^2 \backslash \{p\}) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{p\}$ *por*

$$H(x,t) = t \cdot r(x) + (1-t) \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{p\}, \quad t \in I.$$

É fácil ver que H *é uma deformação retrátil e então* A *é um retrato por deformação de* $\mathbb{R}^2 \backslash \{p\}$*. Assim,* $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash \{p\}) \simeq \pi_1(A) \simeq \mathbb{Z}$*.*

Exemplo A.4.2. *Considere um anel* X *no plano. Tanto o círculo interior como o círculo exterior de* X *são retratos por deformação de* S^1*, então* $\pi_1(X)$ *é o grupo dos inteiros.*

Exemplo A.4.3. *Cada um dos seguintes espaços são contráteis, então cada um deles tem grupo fundamental trivial: um ponto; um intervalo na reta; a reta; o n-espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^n$*; todo conjunto convexo em* $\mathbb{R}^n$*.*

Outros exemplos de grupo fundamental podem ser obtidos a partir do resultado seguinte.

Proposição A.4.1. *Sejam* X *e* Y *espaços com* x_0 *em* X *e* y_0 *em* Y*. Então*

$$\pi_1(X \times Y, \ (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0).$$

Demonstração: É similar à apresentada para grupos de homotopia de ordem superior (ver Proposição 1.2.1).

Exemplo A.4.4. *O toro* T^2 *é homeomorfo ao produto* $S^1 \times S^1$*. Então* $\pi_1(T^2) \simeq \pi_1(S^1 \times S^1) \simeq \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$*.*

Exemplo A.4.5. *Um toro n-dimensional* T^n *é o espaço obtido como o produto cartesiano de* n *círculos unitários. Então* $\pi_1(T^n)$ *é isomorfo à soma direta de* n *cópias do grupo dos inteiros,* $\pi_1(T^n) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{n \ vezes}$*.*

Exemplo A.4.6. *Um cilindro fechado C é o produto de um círculo S^1 e um intervalo fechado [a,b]. Então $\pi_1(C) \simeq \pi_1(S^1) \oplus \pi_1([a,b]) \simeq \mathbb{Z} \oplus \{0\} \simeq \mathbb{Z}$.*

Um resultado muito útil para calcular o grupo fundamental de certos espaços é o T eorema de Van Kampen ([7], IV. Teoremas 2.1 e 2.2, ou [5] Teorema 1.20). Apresentamos aqui a versão segundo Hatcher [5]. A versão dada em [7] envolve propriedades do diagrama universal. Ressaltamos no entanto que pode-se verificar que as duas versões são equivalentes considerando a definição de produto livre via diagramas.

Teorema A.4.1. (***Teorema de Van Kampen***) *Seja X a união de espaços abertos conexos por caminhos A_α, cada um contendo o ponto base $x_0 \in X$, $j_\alpha : \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$, os homomorfismos induzidos das inclusões A_α em X, e $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ o homomorfismo estendido no produto livre. Se cada intersecção $A_\alpha \cap A_\beta$ é conexa por caminhos, então o homomorfismo $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ é sobrejetor. Ainda, se cada intersecção $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ é conexa por caminhos, então o kernel de Φ é o subgrupo normal N gerado pelos elementos da forma $i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ (onde $i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \to \pi_1(A_\alpha)$ é o homomorfismo induzido da inclusão) e assim Φ induz um isomorfismo $\pi_1(X) \simeq *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$.*

Demonstração: ([5], Teorema 1.20, p. 43). ■

Considerando o caso particular em que X é a união de abertos A_1 e A_2 e que A_1, A_2 e $A_1 \cap A_2$ são conexos por caminhos, então do teorema anterior obtém-se as seguintes conseqüências:

Corolário A.4.1. *Se $A_1 \cap A_2$ é simplesmente conexo, então $\pi_1(X)$ é o produto livre dos grupos $\pi_1(A_1)$ e $\pi_1(A_2)$ com respeito aos homomorfismos induzidos das inclusões $j_1 : \pi_1(A_1) \longrightarrow \pi_1(X)$ e $j_2 : \pi_1(A_2) \longrightarrow \pi_1(X)$.*

Demonstração: ([7], Teorema 3.1, p. 122). ■

Corolário A.4.2. *Assuma que A_2 é simplesmente conexo. Então $j_1 : \pi_1(A_1) \longrightarrow \pi_1(X)$ é um epimorfismo, e seu kernel é o menor subgrupo normal de $\pi_1(A_1)$ contendo a imagem $k_1(\pi_1(A_1 \cap A_2))$, onde k_1 é o homomorfismo induzido da inclusão $k_1 : \pi_1(A_1 \cap A_2) \longrightarrow \pi_1(A_1)$. Assim, $\pi_1(X) \simeq \pi_1(A_1)/N$, onde N é o subgrupo normal de $\pi_1(A_1)$ gerado por $k_1 : \pi_1(A_1 \cap A_2) \longrightarrow \pi_1(A_1)$*

Demonstração: ([7], Teorema 4.1, p. 127). ■

Exemplo A.4.7. *Seja X a reunião de dois círculos tangentes num ponto x_0 ($X = S_1^1 \vee S_2^1$). Então $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Com efeito, sejam $\alpha_i = [c_i]$ onde $c_i : I \longrightarrow X$ é o caminho com ponto base x_0 e que dá uma única volta em torno de S_i^1, para $i = 1, 2$. Tome dois pontos a e b, distintos, de X com $a \in S_1^1$ e $b \in S_2^1$. Considere $U = X - \{a\}$ e $V = X - \{b\}$. Então U e V são abertos, $U \cap V$ é conexo por caminhos e é simplesmente conexo pois é contráctil. Pelo corolário A.4.1 temos que $\pi_1(X) \simeq \pi_1(U) * \pi_1(V)$. Mas U e V têm o mesmo tipo de homotopia de S^1, logo $\pi_1(U) \simeq \mathbb{Z}$ e $\pi_1(V) \simeq \mathbb{Z}$. Portanto $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \langle \alpha_1 \rangle * \langle \alpha_2 \rangle$.*

Exemplo A.4.8. *Se X é a reunião de n círculos tangentes num ponto x_0 ($X = \bigvee_{i=1}^{n} S_i^1$). Então $\pi_1(X) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ vezes}}$. Para ver isso considere agora $\alpha_i = [c_i]$ onde $c_i : I \longrightarrow X$ é o caminho com ponto base x_0 e que dá uma única volta em torno de S_i^1, para $i = 1, \ldots, n$. Mostremos por indução sobre n. Tome pontos $a_i \in S_i^1$ (distintos de x_0) $i = 1, \ldots, n$. Considere $U = X - \{a_n\}$ e $V = X - \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, então U e V são abertos, $U \cap V$ é conexo por caminhos e é simplesmente conexo pois é contráctil. Pelo corolário A.4.1 temos que $\pi_1(X) \simeq \pi_1(U) * \pi_1(V)$. Mas U têm o mesmo tipo de homotopia de $\bigvee_{i=1}^{n-1} S_i^1$ e V têm o mesmo tipo de homotopia de S^1, logo $\pi_1(U) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n-1 \text{ vezes}}$ (por hipótese de indução) e $\pi_1(V) \simeq \mathbb{Z}$. Portanto $\pi_1(X) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ vezes}}$.*

Mais geralmente, temos:

Exemplo A.4.9. *O grupo fundamental do bouquet de círculos $\pi_1(\bigvee_{\alpha \in \boldsymbol{A}} S_\alpha^1)$, indexados em um conjunto $\boldsymbol{A}$, é isomorfo a F onde F é o grupo livre gerado por $\boldsymbol{A}$. De fato, considere para cada α, um ponto x_α em S_α^1, diferente de x_0 e a vizinhança aberta $U_\alpha := S_\alpha^1 - \{x_\alpha\}$ de x_0 em S_α^1. Então x_0 é um retrato por deformação de U_α em S_α^1, e S_α^1 é um retrato por deformação de*
$A_\alpha := S_\alpha^1 \bigvee_{\beta \neq \alpha} U_\beta$. A intersecção de dois ou mais $A'_\alpha s$ distintos é $\bigvee_\alpha U_\alpha$ que é conexa por caminhos e tem como retrato por deformação o ponto x_0. O Teorema de Van Kampen implica que $\pi_1(X) \simeq *_\alpha \pi_1(S_\alpha^1)/N$ onde N é o subgrupo normal gerado por $i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$. Porém $N = \{0\}$ visto que $A_\alpha \cap A_\beta$ é contráctil para quaisquer $\alpha, \beta \in A$ e $\pi_1(S_\alpha^1) \simeq \mathbb{Z}$. Logo $\pi_1(X) \simeq *_\alpha \mathbb{Z}_\alpha \simeq F$, como afirmado.

Referências Bibliográficas

[1] Brown, K. S. *Cohomology of Groups*. G. T. M. 87, New York, Springer Verlag, 1982.

[2] Castro, F., *Cohomologia de Grupos e Algumas Aplicações*, Dissertação de Mestrado, 2006.

[3] Croom, F. H., *Basics Concepts of Algebraic Topology*, New York: Springer-Verlag, 1978.

[4] Garcia, A., Lequain, Y. *Álgebra: um curso de introdução*, IMPA/CNPQ (Projeto Euclides), 1988.

[5] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[6] Hilton, P.J., Wylie, S., *An Introduction to Algebraic Topology* , Cambridge: Cambridge University Press, 1960.

[7] Massey, W.S., *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[8] Munkres,J.R., *Elements of Algebraic Topology*, New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[9] Robinson, D. J. S. ; *A course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[10] Schubert, H., *Topology*, McDonald Technical & Scientific, 1968.

[11] Spanier, E. H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill , 1967.

[12] Whitehead, G.W., *Elements of Homotopy Theory*, New York: Springer-Verlag, 1978.

[13] Whitehead, G.W., *Homotopy Theory*, The Massachusetts Institute of Technology Press, 1966.

[14] S. Eilenberg and S. MacLane (1947), Cohomology theory in abstracts groups. II Groups extensions with a non-abelian kernel, *Annals of Mathematics* (2) 48 (1947), p. 326-341.

[15] S. Eilenberg and S. MacLane (1945), Relations betwen homology and homotopy groups and spaces, *Annals of Mathematics* (2) 46 (1945), p. 480-509.

[16] J. H. C. Whitehead (1948), On the realizability of homotopy groups, *Annals of Mathematics* (2) 50 (1949), p. 261-263.