UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Decomposição de grupos e Invariantes ends

Marina Marcia Ricieri

Orientadora: Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto
2007

Ricieri, Marina Marcia.

Decomposição de grupos e invariantes ends / Marina Marcia Ricieri. - São José do Rio Preto : [s.n], 2007. 88 f. : il ; 30 cm.

Orientadora: Ermínia de Lourdes Campello Fanti

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1.Topologia Algébrica. 2.Decomposição de grupos. 3.Invariantes ends. 4.Obstrução sing. 5.Grafos e árvores. I. Fanti, Ermínia de Lourdes Campello. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 515.14

COMISSÃO JULGADORA

Titulares

Ermínia de Lourdes Campello Fanti

Professora Doutora - IBILCE - UNESP

Orientadora

Maria Gorete Carreira Andrade

Professora Doutora - IBILCE - UNESP

1º Examinador

Pedro Luiz Queiroz Pergher

Professor Doutor - UFSCar

2º Examinador

Suplentes

Edivaldo Lopes dos Santos

Professor Doutor - UFSCar

1º Suplente

João Peres Vieira

Professor Doutor - IGCE - UNESP

2ª Suplente

Aos meus pais,

Bird e Dirce

e ao meu noivo,

Cássio

dedico.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para esta realização. Em especial agradeço:

À Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, que projetou este trabalho, por toda dedicação durante a sua orientação, pelos conhecimentos transmitidos, pela paciência e disponibilidade que sempre teve comigo.

À Profª. Drª. Maria Gorete Carreira Andrade, pelas sugestões importantes para a realização deste trabalho e por sua alegria sempre presente.

À Profª. Drª. Neuza Kazuko Kakuta pelos conselhos nos momentos de indecisão e ansiedade, pela confiança, formação e estímulo.

Aos demais professores do Departamento de Matemática da UNESP - São José do Rio Preto, pela formação acadêmica e pelo incentivo.

Aos amigos do curso de Pós-graduação: Évelin, Cibele, Aline, Durval e Marcos pelos momentos inesquecíveis que passamos juntos.

Aos professores do Colégio Dom Bosco de Monte Aprazível, em especial às professoras Adriana e Cláudia, por me mostrarem a beleza da Matemática.

Às amigas de todas as horas, Michelle e Ana Lúcia, pela amizade construída durante os anos de graduação e pelo apoio nos momentos difíceis.

Aos amigos da agência Fórum São José do Rio Preto do Banco Nossa Caixa, em especial à Salete e Silvia, pelo incentivo e compreensão, e à Natália, Analu e Jô pela amizade e estímulo.

Ao meu noivo Cássio, por todos os momentos que vivemos juntos, pela força, incentivo, pelo carinho que sempre teve comigo.

Aos meus pais Bird e Dirce por serem os meus maiores incentivadores, pelo apoio incondicional, pela confiança que sempre tiveram em mim e pelo amor que me deram a vida toda.

A toda minha família pelo incentivo e pela torcida.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.

“O rio atinge seus objetivos porque aprendeu a contornar obstáculos.”

(Lau-Tsé)

Sumário

Resumo

Um grupo G se decompõe sobre um subgrupo S se G é um produto livre com subgrupo amalgamado S ou uma extensão HNN. Neste trabalho, propusemo-nos a relacionar, sob alguns aspectos, decomposição de grupos e invariantes ends. Mais precisamente, demonstramos os teoremas da forma normal para produtos livres com subgrupo amalgamado e extensões HNN e apresentamos alguns resultados relativos à teoria de grafos, ends de grupos e pares de grupos, finalizando com a prova de um teorema de Kropholler e Roller, sobre decomposição de grupos, envolvendo a obstrução $sing$.

Palavras chave: Produtos livres com subgrupo amalgamado, extensão HNN, grafos, decomposição de grupos, ends.

Abstract

A group G splits over a subgroup S if G is a free product with amalgamated subgroup S or an HNN extension. In this work, we are concerned in relating, under some aspects, splittings of groups and invariants ends. More precisely, we prove the theorems normal forms for free products with amalgamated subgroup and HNN extensions and we present some results related with the theory of graphs, ends of groups and pairs of groups, concluding with the proof of a theorem by Kropholler and Roller, on decomposition of groups, involving the obstruction *sing*.

Key words: Free products with amalgamated subgroup, HNN extension, graphs, splittings of groups, ends.

Introdução

Grupos que se decompõem sobre um subgrupo surgem naturalmente, por exemplo, quando calculamos, através do Teorema de Van Kampen, o grupo fundamental das superfícies compactas. Estes grupos também surgem na teoria de grafos. Dizemos que um grupo G se *decompõe sobre um subgrupo* C, se G é um produto livre com subgrupo amalgamado C, isto é, $G = A *_C B$ com $A \neq C \neq B$ ou G é uma extensão HNN, $G = A*_C$.

Intimamente relacionada com a teoria de decomposição de grupos está a teoria de ends de grupos e pares de grupos. O primeiro resultado de decomposição de grupos (sobre um subgrupo finito), envolvendo a teoria clássica de ends de um grupo, foi dado por Stallings:

Se um grupo G se decompõe sobre um subgrupo finito então $e(G) \geq 2$, onde $e(G)$ indica o número de ends de G. Reciprocamente, se G é finitamente gerado e $e(G) \geq 2$ então G se decompõe sobre um subgrupo finito.

Como para todo grupo G pode-se mostrar que $e(G) = 0$, 1, 2 ou ∞, com $e(G) = 0$ se, e só se, G é finito, e para $e(G) \geq 2$, já temos o resultado anterior (de Stallings), é interessante analisar então decomposição de grupos para grupos G satisfazendo $e(G) = 1$. Agora, se G é um grupo de dualidade de dimensão n (D^n-grupo), $n > 1$ pode-se mostrar que $e(G) = 1$, assim é interessante estudar o problema de decomposição de grupos nessas condições.

De fato estaremos interessados em analisar quando um grupo G se decompõe sobre um subgrupo S, ou melhor sobre um subgrupo comensurável a S, no caso em que G é um PD^n-grupo (grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n) e S um

PD^{n-1}-subgrupo.

Uma resposta neste sentido é dada por Kropholler e Roller, (em [12]), em termos de uma obstrução *sing* (supondo $H^1(G, \mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2$ ou equivalentemente, $\tilde{e}(G,S) = 2$). O principal resultado apresentado por Kropholler e Roller envolvendo essa obstrução é:

Se G é um PD^n-grupo e S é um PD^{n-1}-subgrupo, então G se decompõe sobre um subgrupo comensurável a S se, e somente se, $sing_G S = 0$.

Nosso objetivo neste trabalho é provar os teoremas das formas normais para produtos livres amalgamados e extensões HNN (que são muito úteis no estudo de decomposição de grupos uma vez que eles nos dão a forma/expressão dos elementos desses grupos), explorar um pouco a relação existente entre decomposição de grupos e grafos, mais precisamente entre decomposição de grupos e ação de grupos em árvores, apresentar alguns resultados relativos a decomposição de grupos e invariantes ends, com destaque para o Teorema de Stallings: *Se G é finitamente gerado então G se decompõe sobre um subgrupo finito se, e somente se, $e(G) \geq 2$*, (Teoremas 4.1.3 e 4.1.4), onde $e(G)$ indica o número de ends de um grupo G e, finalmente, provar uma das implicações do resultado de Kropholler e Roller, a saber: *Se G é um PD^n-grupo, S é um PD^{n-1}-subgrupo e G se decompõe sobre um subgrupo comensurável a S então $sing_G S = 0$* (Teorema 4.3.2).

A seguir relatamos o objetivo de cada um dos capítulos em que este trabalho está dividido.

No Capítulo 1, iniciamos abordando a questão da existência e unicidade de um grupo livre sobre um conjunto X. Como pode-se observar, a existência é provada a partir do conjunto de palavras (reduzidas) sobre X. A partir daí, obtemos que todo grupo G pode ser representado em termos de geradores e relações. A seguir estudamos a construção dos produtos livres e a forma normal de seus elementos e, utilizando a construção anterior (do produto livre) analisamos os casos relativos a decomposição de grupos, a saber, *produtos livres com subgrupos amalgamados e extensões HNN*. Mais precisamente, definimos o push-out e provamos os teoremas da forma normal para produtos livres amalgamados e extensões HNN.

No Capítulo 2, é feito um estudo a respeito de *grafos* e *árvores*, porém a demonstração de alguns resultados foram omitidas, uma vez que o objetivo central deste capítulo é mostrar a relação existente entre decomposição de grupos (produtos livres amalgamados e extensões HNN) e ação de grupos sobre árvores, formalizadas nos Teoremas 2.2.1 e 2.2.2.

No Capítulo 3, temos como objetivo principal apresentar um breve estudo de *cohomologia de grupos* uma vez que os invariantes *ends* a serem tratados neste trabalho, e que estão fortememte relacionados com decomposição de grupos, podem ser definidos usando uma linguagem cohomológica. Também apresentamos o conceito de grupos de dualidade que serão importantes no último capítulo. Mais detalhadamente, introduzimos inicialmente os conceitos de RG-módulos e Resoluções de R sobre RG, onde R é um anel comutativo com unidade e G um grupo denotado multiplicativamente. Em seguida, definimos módulos coinvariantes e invariantes além dos módulos coinduzidos e induzidos para então definirmos os n-ésimos grupos de homologia e cohomologia do grupo G, com coeficientes no RG-módulo M:

$$H_n(G, M) = H_n(F \otimes_{RG} M) \text{ e } H^n(G, M) = H^n(Hom_{RG}(F, M)),$$

onde $\varepsilon : F \to R$ é uma resolução projetiva de R sobre RG, além de darmos exemplos de grupos de homologia e cohomologia para alguns grupos e RG-módulos específicos. Apresentamos ainda o Lema de Shapiro, que relaciona a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de seu subgrupo H, encerrando então o capítulo, com um estudo resumido de grupos de dualidade.

Finalmente, no Capítulo 4, abordamos os *invariantes ends* (o end clássico $e(G)$ e o end do par $e(G, S)$), relacionando-os com decomposição de grupos, com destaque para o resultado de Stallings, que utiliza os conceitos introduzidos nos capítulos anteriores. Destacamos ainda, a prova do Teorema 4.3.2, anteriormente citado, que relaciona a obstrução "*sing*" (e indiretamente, o invariante end $\tilde{e}(G, S)$ definido por Kropholler e Roller) com decomposição de grupos, nos valendo de resultados referentes a grupos de dualidade, além dos Teoremas 2.2.1 e 2.2.2 que serão reescritos no Teorema 4.3.1, englobando os casos para produtos livres amalgamados e extensões HNN.

Capítulo 1

Produtos Livres Amalgamados e Extensões HNN

Neste capítulo, abordaremos os conceitos de grupos livres, produtos livres, produtos livres amalgamados e extensões HNN, que são fundamentais no estudo de decomposição de grupos. Os Teoremas da Forma Normal para produtos livres amalgamados e extensões HNN (Teoremas 1.4.2 e 2.2.3), são de grande relevância, uma vez que serão necessários na prova do teorema de Stallings para $e(G)$ e no de Scott para $e(G,S)$ que serão enunciados no último capítulo. As referências principais para este capítulo são [8] e [18].

1.1 Grupos Livres

Definição 1.1.1 *Sejam X um conjunto não vazio, F um grupo e $i : X \to F$ uma função. O par (F, i) é chamado* livre sobre X *se para quaisquer grupo H e função $f : X \to H$ existe um único homomorfismo $\phi : F \to H$ com $\phi \circ i = f$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "\exists!\ \phi"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.1.1 *Se F é o grupo cíclico infinito gerado por a, então para qualquer* *conjunto unitário* $\{x\}$*, considerando* $i : X \to F$ *tal que* $i(x) = a$ *(gerador do grupo), temos* (F, i) *livre sobre* X*.*

Observação 1.1.1 *O grupo trivial é considerado como um grupo livre sobre o conjunto vazio.*

Proposição 1.1.1 *Sejam* (F_1, i_1) *e* (F_2, i_2) *livres sobre* X*. Então existe um isomorfismo* $\phi : F_1 \to F_2$ *tal que* $\phi \circ i_1 = i_2$*, isto é, o grupo livre é único, a menos de isomorfismo.*

Demonstração: Como (F_1, i_1) é livre sobre X, existe um homomorfismo $\phi : F_1 \to F_2$ com $\phi \circ i_1 = i_2$. Por outro lado, como (F_2, i_2) é livre sobre X, existe um homomorfismo $\psi : F_2 \to F_1$ com $\psi \circ i_2 = i_1$. Então $\psi \circ \phi \circ i_1 = i_1 = id_{F_1} \circ i_1$, onde id_{F_1} indica a aplicação identidade em F_1. Pela propriedade da unicidade, temos $\psi \circ \phi = id_{F_1}$. Analogamente, $\phi \circ \psi = id_{F_2}$; então ϕ é um isomorfismo. ∎

Proposição 1.1.2 *Seja* (F, i) *livre sobre* X*. Temos que:*

(i) Se existe um grupo G *e uma função injetiva* $f : X \to G$ *então* i *é injetiva.*

(ii) $\wp(X)$*, o conjunto das partes de* X *é um grupo com a diferença simétrica, e* $x \mapsto \{x\}$ *é injetiva.*

(iii) i *é injetiva.* ∎

Demonstração: (i) Suponhamos que exista G (grupo) tal que $f : X \to G$ seja injetiva. Como F é livre sobre X, para $f : X \to G$, existe $\phi : F \to G$ tal que $\phi \circ i = f$. Mas, f injetiva implica i injetiva. É fácil verificar (ii). Finalmente, segue da proposição anterior que se F é livre sobre X, podemos considerar X como um subconjunto de F. Assim, (iii) segue de (i) e (ii), considerando $G = \wp(X)$ e $f : X \to \wp(X)$, $x \to \{x\}$. ∎

Estamos interessados agora em responder se dado um conjunto X, existe um grupo F e uma aplicação $i : X \to F$ (que pode ser a inclusão) tal que (F, i) é livre sobre X.

Seja X um conjunto qualquer não vazio. Denotemos por $M(X)$ o conjunto de todas seqüências $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, $(n \geq 0)$ de elementos de X (o caso $n = 0$ corresponde à seqüência vazia e os elementos x_{ij} não são necessariamente distintos). Podemos definir uma multiplicação sobre $M(X)$ por justaposição, isto é, $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}).(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$.

Esta multiplicação é obviamente associativa com um elemento identidade (ou neutro) como sendo a seqüência vazia, que vamos denotar por 1 ou ( ). Também a aplicação $X \to M(X)$; $x \mapsto (x)$ é obviamente injetiva, e se identificarmos (x) com x, todo elemento de $M(X)$ pode ser unicamente escrito como um produto $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$. $M(X)$ é chamado de *monóide livre* sobre X.

Seja $\overline{X}$ um conjunto com $X \cap \overline{X} = \emptyset$ e tal que existe uma bijeção $\varphi : X \to \overline{X}$; $x \mapsto \varphi(x)$.Vamos denotar $\varphi(x)$ por x^{-1} (e x por x^1). Podemos considerar agora os elementos de $M(X \cup \overline{X})$, tais elementos são chamados *palavras* em X. Se $u \in M(X \cup \overline{X})$ e $u = y_{i_1}. \ldots .y_{i_n}$, com $y_{i_r} \in X \cup \overline{X}$, então n é chamado o *comprimento* de u, e é denotado por $\mid u \mid$ ou $l(u)$, e os elementos y_{i_r} são chamados *letras* de u.

Uma palavra $w = {x_{i_1}}^{\varepsilon_1} \ldots {x_{i_n}}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_r = \pm 1$ é chamada *palavra reduzida* se, para $1 \leq r \leq n-1$, temos $i_{r+1} \neq i_r$, ou $i_{r+1} = i_r$, mas $\varepsilon_{r+1} \neq -\varepsilon_r$; a palavra vazia é também dita reduzida. Seja $w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots {x_{i_n}}^{\varepsilon_n}$ uma palavra não reduzida, isto é, tal que $i_{r+1} = i_r$ e $\varepsilon_{r+1} = -\varepsilon_r$. dizemos que w' é obtida de w por uma *redução elementar* se $w' = {x_{i_1}}^{\varepsilon_1} \ldots {x_{i_{r-1}}}^{\varepsilon_{r-1}} {x_{i_{r+2}}}^{\varepsilon_{r+2}} \ldots {x_{i_n}}^{\varepsilon_n}$, onde $i_{r+1} = i_r$ e $\varepsilon_{r+1} = -\varepsilon_r$.

Sobre $M(X \cup \overline{X})$, considere a seguinte ralação $w \equiv w'$ se, e somente se, $w = w'$ ou existe uma seqüência $w = w_1\, w_2 \ldots w_k = w'$ tal que, para $1 \leq j \leq k-1$, ou w_{j+1} é obtido de w_j por uma redução elementar, ou w_j é obtido de w_{j+1} por uma redução elementar.

É fácil ver que, se $w \equiv w'$, então $u.w.v \equiv u.w'.v$ para quaisquer $u, v \in M(X \cup \overline{X})$, e se, além disso, $u \equiv u'$, então $u.w \equiv u'.w'$. Segue que a multiplicação em $M(X \cup \overline{X})$ induz uma multiplicação em $F(X) := \dfrac{M(X \cup \overline{X})}{\equiv}$, o conjunto das classes de equivalência, e esta multiplicação é associativa com um elemento identidade (neutro) 1 (a classe da sequência vazia). Ainda, $F(X)$ é um grupo, uma vez que se $w = {x_{i_1}}^{\varepsilon_1} \ldots {x_{i_n}}^{\varepsilon_n}$ e $w' = {x_{i_n}}^{-\varepsilon_n} \ldots {x_{i_1}}^{-\varepsilon_1}$, temos $w.w' \equiv 1$. A inclusão $X \subset M(X \cup \overline{X})$

induz uma aplicação (injetiva) $i : X \to F(X)$; $x \mapsto \overline{x}$ (a classe da palavra reduzida), onde $F(X) = \dfrac{M(X \cup \overline{X})}{\equiv}$ é claramente gerado por $i(X)$.

Teorema 1.1.1 *Sejam $(F(X), i)$ definidos como anteriormente. Então $(F(X), i)$ é livre sobre X.*

Demonstração: Já vimos que $F(X)$ construído como acima é um grupo. Seja $f : X \to G$ uma aplicação. Claramente, esta aplicação estende-se a uma aplicação $M(X \cup \overline{X}) \to G$ por ${x_{i_1}}^{\varepsilon_1} \dots {x_{i_n}}^{\varepsilon_n} \mapsto f(x_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\varepsilon_n}$ que preserva multiplicação. Note que se $i_{r+1} = i_r$, $\varepsilon_{r+1} = -\varepsilon_r$, então

$$f(u) = f(x_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\varepsilon_n} = f(x_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots f(x_{i_{r-1}})^{\varepsilon_{r-1}} f(x_{i_{r+2}})^{\varepsilon_{r+2}} \dots f(x_{i_n})^{\varepsilon_n} = f(u'),$$

onde u' foi obtido de u por uma redução elementar.

Portanto, esta aplicação induz um homomorfismo $\phi : F(X) \to G$, $\overline{u} \mapsto f(u)$, onde $\overline{u}$ indica a classe de equivalência de u, que satisfaz obviamente $\phi \circ i = f$. Como $i(X)$ gera $F(X)$, a aplicação é única. ■

Teorema 1.1.2 ***(Forma Normal para Grupos Livres)*** *Seja (F, i) livre sobre X. Pela Proposição 1.1.1, podemos supor $F(X) = \dfrac{M(X \cup \overline{X})}{\equiv}$, como definido anteriormente. Então existe exatamente uma palavra reduzida em cada classe de equivalência.*

Demonstração: É claro que toda classe de equivalência contém pelo menos uma palavra reduzida.

A unicidade será provada pelo Método de van der Waerden. Seja S o conjunto de todas as seqüências finitas $({x_{i_1}}^{\varepsilon_1}, \dots, {x_{i_n}}^{\varepsilon_n})$, $n \geq 0$, $\varepsilon_r = \pm 1$, $1 \leq r \leq n$, e $G = \mathcal{B}_{ij}(S)$ o grupo das permutações de S.

Tome $x^\varepsilon \in X \cup \overline{X}$. Então a aplicação que associa

$$({x_{i_1}}^{\varepsilon_1}, \dots, {x_{i_n}}^{\varepsilon_n}) \mapsto (x^\varepsilon, {x_{i_1}}^{\varepsilon_1}, \dots, {x_{i_n}}^{\varepsilon_n}), \text{ a menos que } x_{i_1} = x \text{ e } \varepsilon.\varepsilon_1 = 1,$$
$$({x_{i_1}}^{\varepsilon_1}, \dots, {x_{i_n}}^{\varepsilon_n}) \mapsto ({x_{i_2}}^{\varepsilon_2}, \dots, {x_{i_n}}^{\varepsilon_n}), \text{ se } x_{i_1} = x \text{ e } \varepsilon.\varepsilon_1 = 1,$$

é obviamente uma permutação (bijeção) de S, que nós denotamos por $f(x^\varepsilon)$. Portanto, temos uma aplicação $f : X \cup \overline{X} \to G$; $x^\varepsilon \mapsto f(x^\varepsilon)$. Notemos que $f(x) \circ f(x^{-1}) = id$, assim, $f(x^\varepsilon) = f(x)^\varepsilon$. Tal aplicação induz pelo fato de $F(X)$ ser livre sobre X, como já foi justificado anteriormente, um homomorfismo $\phi : F(X) \to G$, onde dado $\alpha \in F(X) = \dfrac{M(X \cup \overline{X})}{\equiv}$, se $\alpha = \overline{{y_1}^{\varepsilon_1} \ldots {y_j}^{\varepsilon_j} {y_{j+1}}^{\varepsilon_{j+1}} \ldots {y_n}^{\varepsilon_n}}$, (com ${y_1}^{\varepsilon_1}, \ldots, {y_n}^{\varepsilon_n}$ não necessariamente reduzida) definimos $\phi(\alpha) := f(y_1)^{\varepsilon_1} \circ \ldots \circ f(y_n)^{\varepsilon_n}$. Observemos que o fato de ϕ estar bem definida, isto é, independe do representante escolhido para os elementos de $F(X)$, segue do fato de que $f(x) \circ f(x^{-1}) = id$, pois, por exemplo, se $y_j^{\varepsilon_j}.y_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}} = 1$ então $f(y_j)^{\varepsilon_j} \circ f(y_{j+1})^{\varepsilon_{j+1}} = id$.

Além disso, $\phi \circ i = f$, pois dado $x \in X$, $\phi(i(x)) = \phi(\overline{x}) = f(x)$.

Seja agora $\beta \in F(X)$ e $w = {x_{i_1}}^{\varepsilon_1}.\ldots.{x_{i_n}}^{\varepsilon_n}$ uma palavra reduzida na classe de β, isto é, $\overline{w} = \beta$. É fácil ver que se $(\ ) \in S$ é a seqüencia vazia, então $\phi(\beta)(\ ) = \phi(\overline{w})(\ ) = ({x_{i_1}}^{\varepsilon_1}, \ldots, {x_{i_n}}^{\varepsilon_n})$. Pela igualdade de seqüências, segue que w é a única palavra reduzida na classe $\beta = \overline{w}$ e é determinada por $\phi(\beta)(\ )$. ■

Corolário 1.1.1 *Nas condições do teorema anterior, temos que $i : X \to F(X)$ é injetiva.*

Demonstração: Se $x, x_1 \in X$, com $x \neq x_1$, então x, x_1 dão origem a palavras reduzidas distintas (também denotadas por x, x_1). Assim, $x \not\equiv x_1$. ■

Nós usualmente consideramos X como um subconjunto de $F(X)$ com i a inclusão. Frequentemente, identificamos elementos de $F(X)$ com as palavras reduzidas correspondentes.

Poderíamos definir $F(X)$ como o conjunto das palavras reduzidas com a multiplicação induzida. Entretanto, ficaria confuso provar associatividade. Também, este método confunde duas questões importantes, a existência do grupo livre e a forma normal de seus elementos. Normalmente, em questões algébricas, é fácil provar a existência de um objeto livre, mas extremamente difícil encontrar a forma normal.

Seja X um subconjunto de um grupo F, $i : X \to F$ a inclusão. Se (F, i) é livre sobre X, chamamos X uma *base* de F, e simplesmente nos referimos a F como um *grupo livre*. Um grupo livre F tem muitas bases. Se θ é qualquer automorfismo de F então $\theta(X)$ é uma base se, e somente se, X também o é.

Proposição 1.1.3 *Seja X um subconjunto de um grupo G. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) G é livre com base X;

(ii) qualquer elemento de G pode ser unicamente escrito como ${x_{i_1}}^{\varepsilon_1}.\ldots.{x_{i_n}}^{\varepsilon_n}$, $n \geq 0$, $x_{i_r} \in X$, $\varepsilon_r = \pm 1$, onde $\varepsilon_{r+1} \neq -\varepsilon_r$ se $i_{r+1} = i_r$ e $1 \leq r \leq n-1$;

(iii) X gera G e nenhum elemento ${x_{i_1}}^{\varepsilon_1}.\ldots.{x_{i_n}}^{\varepsilon_n}$, tal que $n > 0$, $x_{i_r} \in X$, $\varepsilon_r = \pm 1$, com $\varepsilon_{r+1} \neq -\varepsilon_r$ se $i_{r+1} = i_r$ $(r < n)$, é igual ao elemento identidade.

Demonstração: Podemos facilmente verificar que (ii) e (iii) são equivalentes. Ainda, se G é livre sobre X, então G tem estas propriedades (isto é, $(i) \Rightarrow (ii)$ e (iii)).

Suponha que G satisfaz (iii). Existe obviamente um homomorfismo $F(X) \to G$ que é a identidade sobre X. Esta aplicação é sobrejetora, uma vez que X gera G e é injetiva pela hipótese de que a imagem de uma palavra reduzida não trivial não ser o elemento identidade. ∎

Corolário 1.1.2 *Suponhamos que X gera G. Seja H um grupo e $\phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos que é injetivo sobre X e tal que $\phi(G)$ é livre com base $\phi(X)$, então G é livre com base X.*

Demonstração: Basta notar que a condição (iii) vale para X, uma vez que vale para $\phi(X)$. ∎

Corolário 1.1.3 *Seja F livre com base $\{a, b\}$. Seja $c_i = a^{-i}.b.a^i$, $i \in \mathbb{N}$. Então o subgrupo gerado pelos elementos c_i, $\langle c_i,\ \forall\ i\rangle$ é livre com base $\{c_i\}$.*

Demonstração: Devemos mostrar que ${c_{i_1}}^{r_1}.\ldots.{c_{i_n}}^{r_n} \neq 1$ quando $n > 0$, $r_1, \ldots, r_n \neq 0$ e $i_k \neq i_{k+1}$ para $1 \leq k \leq n-1$ (isto é obviamente equivalente a (iii)). Mas, este elemento é $a^{-r_1}.b^{r_1}.a^{r_1-r_2}.b^{r_2}.\ldots.a^{r_{n-1}-r_n}.b^{r_n}.a^{r_n}$ que não é igual a 1. ■

Corolário 1.1.4 *Seja X uma base de G e Y um subconjunto de X. Então Y é uma base do grupo gerado por Y, $\langle Y \rangle \subset G$.*

Demonstração: (iii) claramente vale para Y. ■

1.2 Geradores e Relações

Faremos nesta seção uma caracterização para grupos, iniciando com um importante resultado.

Proposição 1.2.1 *Qualquer grupo G é um quociente de algum grupo livre.*

Demonstração: Considere $(F(G), i)$ o grupo livre gerado por G. A aplicação identidade $id : G \to G$ se estende a um homomorfismo $F(G) \to G$ que é sobrejetor:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id"'] & F(G) \arrow[dl, "\exists!\,\phi"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Assim, $G \simeq \dfrac{F(G)}{Ker\phi}$. ■

Definição 1.2.1 *Sejam G um grupo, X um conjunto e $\phi : F(X) \to G$ um epimorfismo. Então X é chamado um* conjunto de geradores *para G sob ϕ e a família $\{\phi(x); x \in X\}$ é chamada uma* família de geradores *de G. (Claramente, $G = \langle \phi(x); x \in X \rangle$). Chamamos $Ker\phi$ o* conjunto de relações *de G (sob ϕ).*

Se $u = {x_{i_1}}^{\varepsilon_1} \dots {x_{i_n}}^{\varepsilon_n}$ e $v = {x_{j_1}}^{\eta_1} \dots {x_{j_m}}^{\eta_m}$ são palavras (não necessariamente reduzidas) tais que uv^{-1} representam um elemento do $Ker\phi$ e $\phi(x_i) = a_i$, dizemos que ${a_{i_1}}^{\varepsilon_1} \dots {a_{i_n}}^{\varepsilon_n} = {a_{j_1}}^{\eta_1} \dots {a_{j_m}}^{\eta_m}$ é uma *relação* em G. Em particular, se u representa um elemento de $Ker\phi$, então ${a_{i_1}}^{\varepsilon_1} \dots {a_{i_n}}^{\varepsilon_n} = 1$ é uma relação em G.

Para qualquer subconjunto S de um grupo H, $\langle S\rangle^H$ (o *fecho normal* de $\langle S\rangle$ em H, isto é, o menor subgrupo normal gerado por $\langle S\rangle$ em H) é chamado o *conjunto de conseqüências de* S.

Dizemos que $\mathcal{R} \subseteq F(X)$ é um *conjunto de relações* de G (sob ϕ) se $Ker\phi$ é o conjunto de conseqüências de $\mathcal{R}$, ou seja $\langle\mathcal{R}\rangle^{F(X)} = Ker\phi$. Temos então um conjunto correspondente de relações de G.

Definição 1.2.2 *Uma* apresentação $\langle X;\mathcal{R}\rangle^\phi$ *de G consiste de um conjunto X, um epimorfismo ϕ de $F(X)$ em G, e um conjunto $\mathcal{R}$ de relações de G (sob ϕ). Freqüentemente, nós omitimos a menção a ϕ, especialmente quando ϕ é a aplicação natural $F(X) \to \dfrac{F(X)}{\langle\mathcal{R}\rangle^{F(X)}}$ ou quando ϕ é injetiva sobre X. Nós escrevemos $G = \langle X;\mathcal{R}\rangle^\phi$ quando $\langle X;\mathcal{R}\rangle^\phi$ é uma apresentação de G, ou ainda, mais simplesmente, $\langle X;\mathcal{R}\rangle$. A notação $\langle X \mid \mathcal{R}\rangle$ é também usada. Se X é finito, G é dito finitamente gerado. Se X e $\mathcal{R}$ são finitos, G é dito finitamente apresentado e a apresentação é dita finita.*

Exemplo 1.2.1 *Um grupo livre $F(X)$ tem $\langle X;\emptyset\rangle$ como sua apresentação.*

Exemplo 1.2.2 *Uma apresentação para o grupo cíclico finito de ordem m é $\langle\{x\};x^m\rangle$, pois $\dfrac{F(X)}{\langle\mathcal{R}^{F(X)}\rangle} \simeq \dfrac{\langle x\rangle}{\langle x^m\rangle} \simeq \mathbb{Z}_m$.*

Se K tem apresentação $\langle X \cup Y;\mathcal{R} \cup S\rangle$, onde $\langle X;\mathcal{R}\rangle$ é uma apresentação de G, freqüentemente denotamos K por $\langle G, Y; S\rangle$. A próxima proposição mostra que existe um homomorfismo canônico entre G e K.

Proposição 1.2.2 *Seja $G = \langle X;\mathcal{R}\rangle^\phi$. Sejam H um grupo e $\{a(x); x \in X\}$ um conjunto de elementos de H. Se $w \in F(X)$ e $w = {x_{i_1}}^{\varepsilon_1} \dots {x_{i_n}}^{\varepsilon_n}$, denote por $w(a)$ o elemento $a(x_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots a(x_{i_n})^{\varepsilon_n}$. Então existe um homomorfismo $\alpha : G \to H$ tal que $\alpha(\phi(x)) = a(x)$ se, e somente se, $a(r) = 1$, para todo $r \in \mathcal{R}$. Também α, se existe, é único.*

Demonstração: Como $G = \langle \phi(X) \rangle$, o homomorfismo α, se existe, é unicamente determinado por seus valores sobre $\phi(X)$.

Considerando que $F(X)$ é livre e tomando a aplicação $a : X \to H$, existe um homomorfismo $\beta : F(X) \to H$ com $\beta(x) = a(x)$, e podemos escrever $\beta = \alpha \circ \phi$ se, e só se, $Ker\phi \subseteq Ker\beta$.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & F(X) & \xrightarrow{\phi} & G = \langle X, \mathcal{R} \rangle^{\phi} \\ & {\scriptstyle a} \searrow & \searrow {\scriptstyle \beta} & \swarrow {\scriptstyle \exists\, \alpha} & \\ & & H & & \end{array}$$

Como $Ker\phi = \langle \mathcal{R} \rangle^{F(X)}$, isto vale se, e só se, $\mathcal{R} \subset Ker\beta$, isto é, se, e só se, $a(r) = 1$, para todo $r \in \mathcal{R}$. ■

Se G é livre sobre X, e $\phi : F(X) \to G = F(X)$ é a identidade, então $w = 1$ é uma relação se, e só se, w é equivalente a 1 em $M(X \cup \overline{X})$. Neste caso, $w(h) = 1$ para qualquer aplicação $x \mapsto h(x)$ de X em qualquer grupo H. Esta é a versão precisa do enfoque informal para grupos livres que normalmente encontramos na literatura.

Nas próximas seções deste trabalho, abordaremos conceitos importantes para alcançarmos nosso primeiro objetivo que consiste na prova dos Teoremas da Forma Normal para elementos dos produtos livres amalgamados e das extensões HNN.

1.3 Produtos Livres

Definição 1.3.1 *Sejam G_α, $\alpha \in \Lambda$ uma família de grupos, G um grupo e $i_\alpha : G_\alpha \to G$ são homomorfismos tais que para quaisquer grupo H e homomorfismos $\phi_\alpha : G_\alpha \to H$ existe um único homomorfismo $\phi : G \to H$ com $\phi_\alpha = \phi \circ i_\alpha$, para todo α. Então $(G, \{i_\alpha\})$ é chamado um* produto livre *dos grupos G_α.*

$$\begin{array}{ccc} G & \overset{\exists!\,\phi}{\dashrightarrow} & H \\ {\scriptstyle i_\alpha} \nwarrow & & \nearrow {\scriptstyle \phi_\alpha} \\ & G_\alpha & \end{array}$$

Da mesma forma que em grupos livres, uma pergunta natural é se produtos livres existem, são únicos e se as aplicações i_α são monomorfismos.

Proposição 1.3.1 *Se $(G, \{i_\alpha\})$ e $(H, \{j_\alpha\})$ são produtos livres dos grupos G_α, então existe um (único) isomorfismo $\phi : G \to H$ tal que $\phi \circ i_\alpha = j_\alpha$, para todo α.*

Demonstração: É similar à dada na Proposição 1.1.1, basta considerar os diagramas:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, dashed, "\exists!\,\phi"] & & H \\ & G_\alpha \arrow[ul, "i_\alpha"] \arrow[ur, "j_\alpha"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G & & H \arrow[ll, dashed, "\exists!\,\psi"'] \\ & G_\alpha \arrow[ul, "i_\alpha"] \arrow[ur, "j_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

onde no primeiro diagrama usamos que G é o produto livre dos G_α e no segundo, que H é o produto livre dos G_α, obtendo assim os homomorfismos ϕ e ψ satisfazendo $\phi \circ i_\alpha = j_\alpha$ e $\psi \circ j_\alpha = i_\alpha$.

Além disso, $(\phi \circ \psi) \circ j_\alpha = j_\alpha = id \circ j_\alpha$, donde segue da unicidade que $\phi \circ \psi = id_H$. Similarmente, $\psi \circ \phi = id_G$. ■

Proposição 1.3.2 *Seja $(G, \{i_\alpha\})$ um produto livre de grupos G_α, $\alpha \in \Lambda$, então:*

(i) $i_\alpha : G_\alpha \to G$ é um monomorfismo se existir um grupo H e homomorfismos $\phi_\beta : G_\beta \to H$, para todo $\beta \in \Lambda$, de modo que ϕ_α é monomorfismo;

(ii) i_α é um monomorfismo, para todo $\alpha \in \Lambda$.

Demonstração:

(i) Considere H e $\phi_\beta : G_\beta \to H$ homomorfismo com ϕ_α monomorfismo. Pela definição de produto livre, existe um único $\phi : G \to H$ comutando o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, dashed, "\exists!\,\phi"] & & H \\ & G_\beta \arrow[ul, "i_\beta"] \arrow[ur, "\phi_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

para todo $\beta \in \Lambda$. Em particular, para $\beta = \alpha$, temos que $\phi \circ i_\alpha = \phi_\alpha$, e como ϕ_α é monomorfismo, segue que i_α é monomorfismo.

(ii) Para cada α (fixado), considere $H = G_\alpha$. Tome $\phi_\beta : G_\beta \to H$ tal que $\phi_\beta = id_{G_\alpha}$ se $\beta = \alpha$ e $\phi_\beta = 0$, para $\beta \neq \alpha$. Por (i), segue o resultado. ■

Proposição 1.3.3 *Qualquer família de grupos G_α tem um produto livre.*

Demonstração: Para cada α, seja $\langle X_\alpha; \mathcal{R}_\alpha\rangle^{\phi_\alpha}$, (onde $\phi_\alpha : F(X_\alpha) \to G_\alpha$) uma apresentação de G_α. Podemos assumir que $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, se $\alpha \neq \beta$ e daí, $G_\alpha \cap G_\beta = \{1\}$, para $\alpha \neq \beta$. Considere $G = \langle \bigcup X_\alpha; \bigcup \mathcal{R}_\alpha\rangle$ e $i_\alpha : G_\alpha \to G$ o homomorfismo canônico. Então $(G, \{i_\alpha\})$ será um produto livre.

Com efeito, sejam H um grupo e $f_\alpha : G_\alpha \to H$ homomorfismos. Existe um homomorfismo $F(\bigcup X_\alpha) \to H$ obtido da aplicação $\bigcup X_\alpha \to H$ que leva x_α em $(f_\alpha \circ \phi_\alpha)(x_\alpha)$. Como este aplica $\bigcup \mathcal{R}_\alpha$ em 1, ele define então um homomorfismo $f : G \to H$, visto que $G = \dfrac{F(\bigcup X_\alpha)}{\langle \bigcup \mathcal{R}_\alpha\rangle^{F(\bigcup X_\alpha)}}$. Claramente, $f_\alpha = f \circ i_\alpha$. Também f é único, uma vez que G é gerado por $\bigcup i_\alpha(G_\alpha)$, ou ainda, por $\bigcup i_\alpha(\phi_\alpha(X_\alpha))$. ■

O produto livre dos grupos G_α é usualmente denotado por $*_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$, ou simplesmente por $*G_\alpha$ e o produto livre de dois grupos G_1 e G_2 por $G_1 * G_2$. Temos que $G_1 * G_2 \simeq G_2 * G_1$ e $(G_1 * G_2) * G_3 \simeq G_1 * (G_2 * G_3)$. Regras mais gerais de comutatividade e associatividade também valem.

Teorema 1.3.1 ***(Forma Normal para Produtos Livres)*** *Seja $G = *G_\alpha$ o produto livre dos G_α via homomorfismos $i_\alpha : G_\alpha \to G$. Então*

(i) os homomorfismos $i_\alpha : G_\alpha \to G$ são monomorfismos;

(ii) considerando, para todo α, i_α como a inclusão, qualquer elemento g de G pode ser unicamente escrito como $g_1 \dots g_n$, onde $n \geq 0$, $1 \neq g_i \in G_{\alpha_i}$ e $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$, $r = 1, \dots, n-1$, ou seja, os elementos (letras) adjacentes pertencem a G_α's distintos.

Demonstração: Denotaremos, por conveniência, $i_\alpha(g_\alpha)$ por $\overline{g_\alpha}$, (ao invés de g_α), para $g_\alpha \in G_\alpha$. (Note que (i) já foi provada por outro método (Proposição 1.3.2, (ii))). Provaremos o teorema se mostrarmos que para qualquer $u \in G$ existem únicos elementos $g_1, \ldots, g_n$ com $n \geq 0$, $1 \neq g_i \in G_{\alpha_i}$, $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$ e $u = \overline{g_1} \ldots \overline{g_n}$.

Como nossa construção de G (dada na proposição anterior) mostra que $\bigcup i_\alpha(G_\alpha)$ gera G, qualquer u pode certamente ser escrito como $\overline{g_1} \ldots \overline{g_n}$, com $n \geq 0$ e $1 \neq g_i \in G_{\alpha_i}$, onde podemos ter $\alpha_r = \alpha_{r+1}$ para algum r. Se $\alpha_{r+1} = \alpha_r$ e $g_{r+1} \neq {g_r}^{-1}$ podemos escrever $u = \overline{g_1} \ldots \overline{g_{r-1}}\, \overline{h}\, \overline{g_{r+2}} \ldots \overline{g_n}$, onde $1 \neq h = g_r g_{r+1} \in G_{\alpha_r}$, enquanto que se $\alpha_{r+1} = \alpha_r$ e $g_{r+1} = {g_r}^{-1}$ podemos escrever $u = \overline{g_1} \ldots \overline{g_{r-1}}\, \overline{g_{r+2}} \ldots \overline{g_n}$. Por indução sobre n, u pode ser escrito na forma requerida em (ii).

Para provar a unicidade vamos seguir o *método de van der Waerden*. Seja S o conjunto de todas as seqüências finitas $(g_1, \ldots, g_n)$, $n \geq 0$, $1 \neq g_i \in G_{\alpha_i}$, $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$; em particular, ( ), a seqüencia vazia, está em S.

Tome $g_\alpha \in G_\alpha$. Podemos definir uma aplicação de S em S, que vamos denotar por $\phi_\alpha(g_\alpha)$, da seguinte forma:

$(g_1, \ldots, g_n) \mapsto (g_\alpha, g_1, \ldots, g_n)$, se $\alpha_1 \neq \alpha$ (lembre-se que $g_1 \in G_{\alpha_1}$),

$(g_1, \ldots, g_n) \mapsto (g_\alpha g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n)$ se $\alpha_1 = \alpha$ e $g_\alpha g_1 \neq 1$,

$(g_1, \ldots, g_n) \mapsto (g_1, \ldots, g_{n-1})$ se $\alpha_1 = \alpha$ e $g_\alpha g_1 = 1$.

Então temos uma aplicação $\phi_\alpha : G_\alpha \to \mathfrak{F}(S, S)$; $g_\alpha \mapsto \phi_\alpha(g_\alpha)$, onde $\mathfrak{F}(S, S)$ denota o conjunto das aplicações de S em S, e podemos facilmente ver que ϕ_α preserva aplicações, isto é, $\phi_\alpha(g_\alpha.g'_\alpha) = \phi_\alpha(g_\alpha) \circ \phi_\alpha(g'_\alpha)$. Ainda, $\phi_\alpha(g_\alpha) \in \mathcal{B}_{ij}(S)$, o conjunto das bijeções de S, uma vez que $\phi_\alpha(g_\alpha)$ tem como inversa a aplicação $\phi_\alpha({g_\alpha}^{-1})$. $(*)$

Seja $\phi : G \to \mathcal{B}_{ij}(S)$ o homomorfismo tal que $\phi_\alpha = \phi \circ i_\alpha$, isto é, ϕ é assim definida: $\phi(\overline{g_\alpha}) = \phi(i_\alpha(g_\alpha)) := \phi_\alpha(g_\alpha)$ e mais geralmente, $\phi(\overline{g_1} \ldots \overline{g_n}) = \phi_{\alpha_1}(g_1) \ldots \phi_{\alpha_n}(g_n)$. Tal homomorfismo fica bem definido por $(*)$. Tome $u \in G$ e escreva-o como $u = \overline{g_1}\, \overline{g_2} \ldots \overline{g_n}$, $n \geq 0$; $1 \neq g_i \in G_{\alpha_i}$, $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$. Agora, pode-se verificar (por indução) que $\phi(u)(\ ) = (g_1, \ldots, g_n)$ e então $g_1, \ldots, g_n$ são unicamente determinados por u. ■

Proposição 1.3.4 *Sejam G_α subgrupos de um grupo G. Então $G = *G_\alpha$ se, e só* *se, todo elemento de G pode ser unicamente escrito como $g_1 \dots g_n$, $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$, $1 \leq r \leq n-1$.*

Demonstração: ([8], Proposição 20) Se $G = *G_\alpha$, então (considerando i_α como inclusões) a condição vale. Por outro lado, se a condição vale, a aplicação $*G_\alpha \to G$ induzida pelas inclusões $G_\alpha \to G$ é claramente um isomorfismo. ∎

Definição 1.3.2 *Seja $g \in *G_\alpha$, $g = g_1 \dots g_n$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$. Chamamos n o* comprimento *de g.*

Exemplo 1.3.1 *O grupo livre sobre X, $F(X)$, é igual ao produto livre $*C_x$, com $x \in X$, onde C_x indica o grupo cíclico infinito com gerador x.*

Exemplo 1.3.2 *Seja $\mathbb{Z}_2$ o grupo cíclico de ordem 2. Então $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle a, b; a^2, b^2 \rangle \simeq \langle a, b, c; a^2, b^2, c^{-1}ab \rangle \simeq \langle a, c; a^2, (c^{-1}a)^{-2} \rangle \simeq \langle a, c; a^2, a^{-1}cac \rangle$. O último isomorfismo nos diz que $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ é isomorfo ao grupo diedral infinito $D_\infty = \{x, y; x^2 = 1, xy = y^{-1}x\}$.*

Observação 1.3.1 *Se G_α, H_α são grupos, $\phi_\alpha : G_\alpha \to H_\alpha$ são homomorfismos, $(G, \{i_\alpha\})$ e $(H, \{j_\alpha\})$ os produtos livres de G_α e de H_α, respectivamente, então existe um único homomorfismo $\phi : G \to H$ tal que $\phi \circ i_\alpha = j_\alpha \circ \phi_\alpha$, para todo α. Denotamos ϕ por $*\phi_\alpha$.*

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & G \\ \phi_\alpha \downarrow & & \downarrow \exists!\, \phi \\ H_\alpha & \underset{j_\alpha}{\rightarrow} & H \end{array}$$

1.4 Produtos Livres com subgrupo amalgamado

Definição 1.4.1 *Sejam C, A e B grupos, $i_1 : C \to A$, $i_2 : C \to B$ homomorfismos. Sejam G um grupo, $j_1 : A \to G$, $j_2 : B \to G$ homomorfismos. Chamamos (G, j_1, j_2) o* push-out *de C, A, B e (i_1, i_2) (ou simplesmente o* push-out *de (i_1, i_2)) se* *(i)* $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$.

(ii) para qualquer grupo H *e homomorfismos* $\phi_1 : A \to H$ *e* $\phi_2 : B \to H$ *com* $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$ *existe um único homomorfismo* $\phi : G \to H$ *com* $\phi_r = \phi \circ j_r$ $(r = 1, 2)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & {\scriptstyle i_1}\nearrow & \downarrow{\scriptstyle j_1} & \searrow{\scriptstyle \phi_1} & \\ C & & G & \overset{- - \to}{\scriptstyle \exists! \phi} & H \\ & {\scriptstyle i_2}\searrow & \uparrow{\scriptstyle j_2} & \nearrow{\scriptstyle \phi_2} & \\ & & B & & \end{array}$$

Exemplo 1.4.1 *Considere os grupos cíclicos* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$ *e* $\mathbb{Z}_3$ *e os homomorfismos canônicos* $i_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ *tal que* $i_1(x) = \overline{x}$ *e* $i_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$ *tal que* $i_2(x) = \overline{\overline{x}}$. *Então o* push-out *de* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ *e* (i_1, i_2) *é o grupo trivial* $G = 0$ *com os homomorfismos nulos* $j_1 : \mathbb{Z}_2 \to 0$ *e* $j_2 : \mathbb{Z}_3 \to 0$.

De fato, para qualquer grupo H *e homomorfismos* $\phi_1 : \mathbb{Z}_2 \to H$, $\phi_2 : \mathbb{Z}_3 \to H$, *com* $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, *considerando o homomorfismo óbvio* $\phi : 0 \to H$, *temos* $\phi \circ j_r = 0$, $r = 1, 2$. *Agora,* $\phi_r = 0$, *pois chamando* $\phi_1(\overline{1}) = h_0$ *e* $\phi_2(\overline{\overline{1}}) = h_1$ *e usando a relação* $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, *chegamos a* $h_0 = h_1$. *Como* ϕ_1 *e* ϕ_2 *são homomorfismos, temos que a ordem dos elementos* h_0 *e* h_1 *dividem 2 e 3, respectivamente. Assim,* $o(h_0) = 1$ *e então* $h_0 = 0$. *Logo,* $\phi \circ j_r = 0 = \phi_r$, $r = 1, 2$, *como desejado.*

Mais geralmente, o push-out *de* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_m$ *e homomorfismos canônicos, com* n *e* m *primos entre si, é o grupo nulo com os homomorfismos nulos* $j_1 : \mathbb{Z}_n \to 0$ *e* $j_2 : \mathbb{Z}_m \to 0$.

Definição 1.4.2 *Quando* i_1 *e* i_2 *são injetivos,* G *é chamado o* produto livre amalgamado *de* A *e* B *com* C *amalgamado, ou produto livre de* A *e* B *amalgamado em* C. *Neste caso, usualmente consideramos* C *como um subgrupo de* A *e* B, *identificando* C *com* $i_1(C)$ *e* $i_2(C)$, *respectivamente, e denotamos o* push-out *por*

$$A *_C B.$$

Observação 1.4.1 *1. Alguns autores, como Brown ([6]) chamam o* push-out *(*mesmo quando i_1 e i_2 não são injetivos*) de produto livre de A e B com subgrupo C amalgamado e usam a notação $A *_C B$ para o* push-out *de C, A, B, sem exigir que as aplicações i_1 e i_2 sejam injetivas. Aqui, porém, tal notação só será usada para produtos livres amalgamados.*

2. *Pode-se verificar facilmente que o* push-out *é único a menos de isomorfismo.*

3. *Não faz sentido falar no "produto livre amalgamado $\mathbb{Z}_2 *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3$", pois não existem homomorfismos injetivos $i_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ e $i_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$.*

Teorema 1.4.1 *Sejam C, A e B grupos. Qualquer par (i_1, i_2) de homomorfismos, com $i_1 : C \to A$ e $i_2 : C \to B$, tem um* push-out.

Demonstração: Considere as apresentações dos grupos A e B, $A = \langle X_1, \mathcal{R}_1 \rangle^{\varphi_1}$ e $B = \langle X_2, \mathcal{R}_2 \rangle^{\varphi_2}$ com $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, isto é, X_1 é um conjunto, φ_1 um epimorfismo de $F(X_1)$ em A e $\mathcal{R}_1$ um conjunto de relações definidas em A (sob φ_1). Similarmente, para B. Desta forma, temos que $A \simeq \dfrac{F(X_1)}{\widetilde{\langle \mathcal{R}_1 \rangle}}$ e $B = \dfrac{F(X_2)}{\widetilde{\langle \mathcal{R}_2 \rangle}}$, onde $\widetilde{\langle \mathcal{R}_r \rangle}$ é o menor subgrupo normal de $F(X_r)$ gerado por $\mathcal{R}_r$, $(r = 1, 2)$.

Seja Y um conjunto de geradores de C e escolha $w_{r_y} \in F(X_r)$ tal que $i_r(y) = \varphi_r(w_{r_y})$, $y \in Y$, $r = 1, 2$. (Note que se identificarmos A e B com os quocientes acima e tomarmos φ_r as projeções naturais, então $i_1(y) = \overline{w_{1_y}}$ e $i_2(y) = \overline{\overline{w_{2_y}}}$, onde $\overline{w_{1_y}}$ e $\overline{\overline{w_{2_y}}}$ representam as classes dos elementos w_{1_y} e w_{2_y} nos quocientes A e B, respectivamente).

Defina G como o grupo que tem apresentação

$$\langle X_1, X_2; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \{w_{1_y} {w_{2_y}}^{-1}, y \in Y\} \rangle \qquad .$$

Para simplificar, denotaremos por J o subgrupo de $F(X_1, X_2)$ $\widetilde{\langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \{w_{1_y} {w_{2_y}}^{-1}, y \in Y\} \rangle}$ e por I_r, os subgrupos $\widetilde{\langle \mathcal{R}_r \rangle}$, $r = 1, 2$. Considere as aplicações $j_1 : A \to G$ e $j_2 : B \to G$ definidas a partir dos geradores X_1 de A e X_2 de B: $j_r(x_r.I_r) = x_r.J$, $r = 1, 2$, onde estamos supondo $x_r \in X_r$ e estendidas de modo natural.

Observe que as aplicações j_r estão bem definidas, pois se $u.I_r = v.I_r$ então $v^{-1}.u \in I_r \subset J$, $(r = 1, 2)$.

Para ver que (G, j_1, j_2) é o *push-out*, seja H um grupo e considere $\phi_1 : A \to H$ e $\phi_2 : B \to H$ homomorfismos. Defina $\phi : G \to H$ a partir dos geradores, isto é, $\phi(x_r.J) = \phi(j_r(x_r.I_r)) := \phi_r(x_r.I_r)$, $x_r \in X_r$, $r = 1, 2$ e estenda para todo elemento de G:

$$\phi({z_1}^{\varepsilon_1}{z_2}^{\varepsilon_2} \dots {z_k}^{\varepsilon_k}.J) = \phi_{s_1}({z_1}^{\varepsilon_1}.I_{s_1})\phi_{s_2}({z_2}^{\varepsilon_2}.I_{s_2}) \dots \phi_{s_k}({z_k}^{\varepsilon_k}.I_{s_k}),$$

onde

$$\begin{cases} z_t \in X_1 \Rightarrow s_t = 1, & \text{isto é } \phi_{s_t}({z_t}^{\varepsilon_t}.I_{s_t}) = \phi_1({z_t}^{\varepsilon_t}.I_1) \\ z_t \in X_2 \Rightarrow s_t = 2, & \text{isto é } \phi_{s_t}({z_t}^{\varepsilon_t}.I_{s_t}) = \phi_2({z_t}^{\varepsilon_t}.I_2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F(X_1) & & \\
 & & \downarrow_{\varphi_1} & & \\
 & & A \simeq \dfrac{F(X_1)}{I_1} & & \\
 & i_1 \nearrow & \downarrow_{j_1} & \searrow_{\phi_1} & \\
C = \langle Y \rangle & & G = \dfrac{F(X_1, X_2)}{J} & \underset{\exists! \phi}{\dashrightarrow} & H \\
 & i_2 \searrow & \uparrow_{j_2} & \nearrow_{\phi_2} & \\
 & & B = \dfrac{F(X_2)}{I_2} & & \\
 & & \uparrow_{\varphi_2} & & \\
 & & F(X_2) & &
\end{array}$$

Claramente, $\phi \circ j_r = \phi_r$ $(r = 1, 2)$. ■

Observação 1.4.2 1. *Se* $A = \langle X_1, \mathcal{R}_1 \rangle$, $B = \langle X_2, \mathcal{R}_2 \rangle$ *e* Y *é um conjunto de geradores de* C*, é usual também representar*

$$G = \langle X_1, X_2; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \{i_1(y)i_2(y)^{-1}, y \in Y\} \rangle.$$

2. *É conveniente, às vezes, escrever* $A *_{K \simeq L} B$ *ou* $A *_{i_2} B$*, onde* $K \subseteq A$*,* $L \subseteq B$*,* i_1 *é a inclusão,* i_2 *um isomorfismo entre* K *e* L*. Neste caso,* $A *_{K \simeq L} B = \dfrac{A * B}{N}$*, onde* N *é o menor subgrupo normal de* $A * B$ *que contém os elementos da forma* $i_1(x).i_2(x)^{-1} = x.i_2(x)^{-1}$*, com* $x \in K$*.*

Portanto, neste caso, temos a seguinte apresentação para $G = A *_{K \simeq L} B$, $G = \langle X_1, X_2; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \{x.i_2(x)^{-1}, \forall\, x \in K\}\rangle$.

Teorema 1.4.2 ***(Forma Normal para Produtos Livres com subgrupo amalgamados)*** *Seja* $G = A *_C B$ *um produto livre amalgamado. Sejam* T_A, T_B *transversais à esquerda de* C *em* A *e* B*, respectivamente, com* $1 \in T_A$, $1 \in T_B$ *(isto é,* T_A *contém um membro de cada classe lateral à esquerda* aC*). Então*

(i) qualquer elemento de G *pode ser unicamente escrito como* $\overline{u_1} \ldots \overline{u_n}\,\overline{c}$*, onde* $n > 0$*,* $c \in C$*, denotando* $j_1(a)$ *por* $\overline{a}$ *e* $j_2(b)$ *por* $\overline{b}$*,* $u_1, \ldots, u_n$ *são alternadamente elementos de* $T_A - \{1\}$ *e* $T_B - \{1\}$*;*

(ii) os homomorfismos $j_1 : A \to G$ *e* $j_2 : B \to G$ *(da definição de produto livre amalgamado) são monomorfismos. Assim, considerando* j_1 *e* j_2 *como inclusões, qualquer elemento de* G *pode ser unicamente escrito como* $u_1 \ldots u_n c$*, onde* $n > 0$*,* $c \in C$ *e* $u_1, \ldots, u_n$ *são alternadamente elementos de* $T_A - \{1\}$ *e* $T_B - \{1\}$*;*

(iii) $j_1(A) \cap j_2(B) = C$*.*

Demonstração:

(i) Denotando temporariamente $j_1(a)$ por $\overline{a}$, é suficiente provar que, para qualquer $g \in G = A *_C B$, existem únicos $u_1, \ldots, u_n$, com $n > 0$, $c \in C$, $u_1, \ldots, u_n$ elementos pertencentes alternadamente a $T_A - \{1\}$ e $T_B - \{1\}$ e $g = \overline{u_1} \ldots \overline{u_n}\ \overline{c}$.

Como a construção do produto livre amalgamado (ou ainda do *push-out*) mostra que $j_1(A) \cup j_2(B)$ gera G, qualquer $g \in G$ pode ser escrito como $g = \overline{g_1} \ldots \overline{g_k}$, $g_i \in A \cup B$. Se g_i e g_{i+1} estão ambos em A ou ambos em B, escrevemos $g = \overline{g_1} \ldots \overline{g_{i-1}}\ \overline{g_i g_{i+1}}\ \overline{g_{i+2}} \ldots \overline{g_k}$. Continuando, podemos escrever

- $g = \overline{c}$, ou
- $g = \overline{g_1} \ldots \overline{g_k}$, onde $g_1, \ldots, g_k$ estão alternadamente em $A - C$ e $B - C$

pois se tivermos $g_i \in C$ e $g_{i+1} \in A$ então $g_i,\ g_{i+1} \in A$. Ainda, se $g_i \in C$ e $g_{i+1} \in A - C$ então $g_i g_{i+1} \in A - C$, pois claramente $g_i g_{i+1} \in A$ e se $g_i g_{i+1} \in C$, teríamos $g_{i+1} = {g_i}^{-1} c_1 \in C$, para algum $c_1 \in C$, o que nos dá uma contradição. Similarmente, raciocinamos para $g_i \in C$ e $g_{i+1} \in B - C$. Dessa forma, temos que se $g = \overline{c}$, $c \in C$, nada há mais a ser feito. Suponhamos então que $g = \overline{g_1}$, com $g_1 \in A - C$ ou $g_1 \in B - C$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $g_1 \in A - C$. Como T_A é um transversal, $g_1 C = u_1 C$, para algum $u_1 \in T_A - \{1\}$, e então $g_1 = u_1 c_2 {c_1}^{-1} \in u_1 C$,onde $c_1,\ c_2 \in C$. Daí, $g = \overline{g_1} = \overline{u_1}\ \overline{c}$, com $u_1 \in T_A - \{1\}$. Agora, se $g = \overline{g_1}\ \overline{g_2}$, onde supomos que $g_1 \in A - C$ e $g_2 \in B - C$, temos $g_1 C = u_1 C,\ u_1 \in T_A - \{1\}$, donde $g_1 = u_1 c_1$ e $c_1 \in C$. Daí, $g = \overline{u_1 c_1}\ \overline{g_2} = \overline{u_1}(\overline{c_1 g_2})$. Mas, $c_1 g_2 C = u_2 C$ e então $c_1 g_2 = u_2 c$, $c \in C$ e $u_2 = c_1 g_2 c^{-1} \in C g_2 C$. Logo, $g = \overline{u_1}\ \overline{u_2}\ \overline{c}$, com $u_2 \in C g_2 C$. Se $g = \overline{g_1} \ldots \overline{g_{k-1}}\,\overline{g_k}$, escrevemos, indutivamente, $\overline{g_1} \ldots \overline{g_{k-1}}$ como $\overline{u_1} \ldots \overline{u_{k-1}}\ \overline{c}$, onde $u_i \in (T_A \cup T_B) - \{1\}$ e, para cada i, $u_i \in C g_i C$, já que u_i vem alternadamente de $T_A - \{1\}$ e $T_B - \{1\}$. Então $g = \overline{g_1} \ldots \overline{g_{k-1}}\,\overline{g_k} = \overline{u_1} \ldots \overline{u_{k-1}}\ \overline{c}\ \overline{g_k} = \overline{u_1} \ldots \overline{u_{k-1}}\ \overline{c g_k} = \overline{u_1} \ldots \overline{u_{k-1}}\ \overline{u_k c_1} = \overline{u_1} \ldots \overline{u_{k-1}}\ \overline{u_k}\ \overline{c_1}$, onde $c_1 \in C$, $u_k \in C g_k C$, $u_k \in T_A \cup T_B$ e $u_k \neq 1$ (pois $g_k \notin C$). Além disso, $u_{k-1},\ u_k$ vêm de diferentes fatores (pois o mesmo ocorre com g_{k-1} e g_k). Por indução, obtemos então, que qualquer elemento de $A *_C B$ pode ser escrito da forma requerida.

Para provar a unicidade, considere S o conjunto de todas as sequências finitas $(u_1, u_2, \ldots, u_n, c)$, com $n > 0$, $c \in C$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ alternadamente em $T_A - \{1\}$ e $T_B - \{1\}$. Apesar de a existência de ϕ ser imediata (pela definição), queremos definir um homomorfismo $\phi : G \to \mathcal{B}_{ij}(S)$ tal que se $g \in G = A *_C B$ e $g = \overline{u_1} \ldots \overline{u_n}\,\overline{c}$, com u_i e c como anteriormente, para então considerando $(\ )$ a palavra vazia, $\phi(g)(\ ) = (u_1, \ldots, u_n, c)$ e daí, como no caso do produto livre, obtemos a unicidade.

Para obter ϕ, definimos primeiramente, homomorfismos $\phi_1 : A \to \mathcal{B}_{ij}(S)$ e $\phi_2 : B \to \mathcal{B}_{ij}(S)$, tais que $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$ e então ϕ segue da definição do produto livre amalgamado (push-out). Definimos $\phi_1 : A \to \mathcal{B}_{ij}(S)$ do seguinte modo:

$a \ \in A \ \mapsto \ \phi_1(a); \ \phi_1(a)(u_1, u_2, \ldots, u_n, c) =$

$$\begin{cases} (u_1, u_2, \ldots, u_n, a', c') \text{ se } u_n \notin A, ca = a'c' \text{ com } a' \in T_A - \{1\} \text{ e } c' \in C, \\ (u_1, u_2, \ldots, u_n, c'), \text{ se } u_n \notin A \text{ e} ca = c', \text{ com} c' \in C \text{ isto é, se } a \in C, \\ (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, a', c') \text{ se } u_n \in A, \text{ e } u_n ca = a'c' \text{ com } a' \in T_A - \{1\} \text{ e } c' \in C, \\ (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, c'), \text{ se } u_n \in A \text{ e } u_n ca = c', \text{ com } c' \in C. \end{cases}$$

Não é difícil provar que ϕ_1 é um homomorfismo. Definimos ϕ_2 de modo análogo. Assim, pode-se verificar que $\phi_1(C) = \phi_2(C)$. De fato, seja $c_0 \in C$. Visto como elemento de A, $c_0 = i_1(c_0) = a_1$, daí, para $(u_1, u_2, \ldots, u_n, c)$, $\phi_1(c_0)(u_1, u_2, \ldots, u_n, c)$ é igual a $(u_1, u_2, \ldots, u_n, c')$, se $u_n \notin A$ e $cc_0 = c'$ ou igual a $(u_1, u_2, \ldots, u_n, c')$ se $u_n \in A$ e $u_n cc_0 = c'$, com $c' \in C$. Visto como elemento de B, $c_0 = i_2(c_0)$, daí, para $(u_1, u_2, \ldots, u_n, c)$, $\phi_2(c_0)(u_1, u_2, \ldots, u_n, c)$ é igual a $(u_1, u_2, \ldots, u_n, c'')$, se $u_n \notin B$ e $cc_0 = c''$ ou igual a $(u_1, u_2, \ldots, u_n, c'')$ se $u_n \in B$ e $u_n cc_0 = c''$, com $c'' \in C$, e assim, $\phi_1(c_0) = \phi_2(c_0)$, para $c_0 \in C$.

Logo, pela definição de produto livre amalgamado, existe um único homomorfismo $\phi : G \to \mathcal{B}_{ij}(S)$ tal que $\phi \circ j_1 = \phi_1$ e $\phi \circ j_2 = \phi_2$. Agora, por indução, vemos que $\phi(w)(\ ) = (u_1, u_2, \ldots, u_n, c)$ para qualquer $w = u_1 u_2 \ldots u_n c \in G$. De fato, suponhamos que $w = u_1 \ldots u_n c$, como nas condições descritas anteriormente. Sem perda de generalidade, suponhamos que $u_1 \in T_A - \{1\}$ e $u_n \in T_B - \{1\}$. Daí, $\phi(w)(\ ) = \phi(u_1 u_2 \ldots u_n c)(\ ) = [\phi_1(u_1)\phi_2(u_2) \ldots \phi_2(u_n)\phi_1(c)](\ ) = u_1 u_2 \ldots u_n c = w$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "j_1"] \arrow[dr, "\phi_1"] & \\
C \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & G \arrow[r, dashed, "\exists!\phi"'] & \mathcal{B}_{ij}(S) \\
 & B \arrow[u, "j_2"'] \arrow[ur, "\phi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

(ii) Considerando ϕ como definida no item (i), afirmamos que $\phi \circ j_1$ e $\phi \circ j_2$ são injetivas. De fato, $(\phi \circ j_1)(a) = \phi(j_1(a)) = \phi(\overline{u_1}\,\overline{c})$. Agora, sendo $(\ )$ a palavra vazia, temos $\phi(\overline{u_1}\,\overline{c})(\ ) = (u_1, c)$. Assim, se tivermos $\phi \circ j_1(a_1) = \phi \circ j_1(a_2)$ então $(u_1, c_1) = (u_2, c_2)$, com u_1 e u_2 em T_A e $c_1, c_2 \in C$. Donde vem que $u_1 = u_2$, $c_1 = c_2$

e assim, $a_1 = a_2$. Logo, $\phi \circ j_1$ é injetiva e portanto, j_1 é injetiva. Analogamente, concluímos que $\phi \circ j_2$ é injetiva e portanto, j_2 é injetiva.

(iii) Seja $u \in j_1(A) \cap j_2(B)$. Então existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $j_1(a) = u = j_2(b)$. Assim, $\overline{u_1}\,\overline{c_1} = j_1(a) = u = j_2(b) = \overline{u_2}\,\overline{c_2}$. Aplicando ϕ em ambos os lados, temos que $\phi(\overline{u_1}\,\overline{c_1}) = \phi(\overline{u_2}\,\overline{c_2})$. Então $\phi(\overline{u_1}\,\overline{c_1})(\ ) = \phi(\overline{u_2}\,\overline{c_2})(\ )$, o que implica $(u_1, c_1) = (u_2, c_2)$. Segue da unicidade de decomposição, de $u_1 \in T_A$ e $u_2 \in T_B$ que $\overline{u_1} = \overline{u_2} = 1$. Portanto, $u = 1.\overline{c_1} = 1.\overline{c_2} \in C$.

■

1.5 Extensões HNN

Definição 1.5.1 *Sejam G, A grupos, i_0, $i_1 : A \to G$ monomorfismos, e P um grupo cíclico infinito com gerador p. Seja N o menor subgrupo normal de $G * P$ gerado por $\{p^{-1}\, i_0(a)\, p\, i_1(a)^{-1},\ a \in A\}$, (aqui a percorre A, ou equivalentemente, um conjunto de geradores de A). Então o grupo quociente $\mathbb{H} = \dfrac{(G * P)}{N}$ é chamado a* extensão HNN de G com letra estável p e subgrupos associados $i_0(A)$ e $i_1(A)$. *Tal grupo é as vezes denotado, desde que não haja confusão, por $G*_A$.*

Observação 1.5.1

1. *Às vezes usamos o termo* HNN-grupo *para nos referirmos a uma extensão HNN.*

2. *É usual considerar A como um subgrupo de G e i_0 como a inclusão. Nesse caso, escrevemos $\mathbb{H} = \langle G, p\,;\ p^{-1}ap = i_1(a), a \in A\rangle = \langle X, p\,; p^{-1}ap = i_1(a), a \in A\rangle$ se X é um conjunto de geradores para G, ou ainda, $\mathbb{H} = \langle G, p\,;\ p^{-1}\,.\,A\,.\,p = B\rangle$, onde $B = i_1(A)$, embora essa notação não deixe a aplicação i_1 explícita.*

3. *Se $g_0, g_1 \in G$ e $j_0, j_1 : A \to G$ são aplicações dadas por $j_r(a) = {g_r}^{-1} i_r(a) g_r$, $r = 0, 1$, então os HNN grupos $\langle G, p;\, p^{-1}.\, i_0(a)\,.\,p = i_1(a)\rangle$ e $\langle G, q;\, q^{-1}.\, j_0(a)\,.\,q = j_1(a)\rangle$ são isomorfos, o isomorfismo leva g em g e p em $g_0.q.{g_1}^{-1}$.*

4. *Um definição mais geral de extensão HNN pode ser dada: Considere uma família de grupos, A_α, $\alpha \in \Lambda$ e monomorfismos $i_{0\alpha}$, $i_{1\alpha} : A_\alpha \to G$, P livre*

sobre $\{p_\alpha\}$. *Seja* N *o menor subgrupo normal gerado por* $\{{p_\alpha}^{-1} . i_{0\alpha}(a_\alpha) . p_\alpha . i_{1\alpha}(a_\alpha)^{-1},\ a_\alpha \in A_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$. *Então* $\mathbb{H} = \dfrac{(G * P)}{N}$ *é a extensão HNN de* G *com letras estáveis* p_α *e pares de subgrupos associados* $i_{0\alpha}(A_\alpha)$ *e* $i_{1\alpha}(A_\alpha)$. *Se* B_α *e* C_α *denotam* $i_{0\alpha}(A_\alpha)$ *e* $i_{1\alpha}(A_\alpha)$, *respectivamente,* $\mathbb{H}$ *é às vezes denotado por* $\langle G, p_\alpha; {p_\alpha}^{-1}.B_\alpha.p_\alpha = C_\alpha\rangle$.

Aqui estamos interessados no caso mais simples, ou seja, quando a família tem apenas dois elementos (Definição 1.5.1).

Exemplo 1.5.1 *Se tomamos* $A = G$ *e* $i_0 = i_1 = id_A$ *então a extensão HNN de* G *com letra estável* p *e subgrupo associado* A *é* $\mathbb{H} = \langle A, p; \{p^{-1}.a.p.a^{-1}, a \in A\}\rangle$. *Em particular:*

1. *Tomando* $G = A = \{1\}$ *então* $\mathbb{H} = \{1, p; \{p^{-1}.1.p\}\} = \langle 1, p\rangle = \langle p\rangle \simeq \mathbb{Z}$, *isto é,* $\mathbb{Z} = \{1\}*_{\{1\}}$.

2. $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} = \langle a\rangle\oplus\langle b\rangle = \langle a, b; \{a.b.a^{-1}.b^{-1}\}\rangle$ *é uma extensão HNN. Basta tomar* $G = A = \langle a\rangle \simeq \mathbb{Z}$ *e* b *como letra estável, pois* $\mathbb{Z}*_{\mathbb{Z}} = \mathbb{H} = \langle a, b; \{b^{-1}.a.b.i_1(a)^{-1}\}\rangle$ $= \langle a, b; \{b^{-1}.a.b.a^{-1}\}\rangle = \langle a, b; \{a.b.a^{-1}b^{-1}\}\rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Definição 1.5.2 *Seja* $\mathbb{H}$ *a extensão HNN de* G *com letra estável* p *e subgrupos associados* $i_0(A)$ *e* $i_1(A)$. *Sejam* T_0 *e* T_1 *transversais à esquerda para* $i_0(A)$ *e* $i_1(A)$ *em* G, *respectivamente, ambos contendo o elemento neutro* 1_G *de* G. *Uma palavra reduzida é, por definição, uma palavra do tipo*

$$g'_0 p^{\varepsilon_0} g'_1 p^{\varepsilon_1} \dots g'_{n-1} p^{\varepsilon_{n-1}} g'_n$$

onde $\varepsilon_i = \pm 1$, $g'_i \in T_0$, *se* $\varepsilon_i = 1$, $g'_i \in T_1$, *se* $\varepsilon_i = -1$, $g'_i \neq 1$ *se* $\varepsilon_{i-1} \neq \varepsilon_i$, *isto é, não podemos ter por exemplo,* $p^{-1} 1_G p$, *e* g'_n *é arbitrário (podendo ser igual a* 1_G*).*

Exemplo 1.5.2 *(a)* g'_0 *é uma palavra reduzida, para todo* $g'_0 \in G$,

(b) $1_G\, p\, 1_G$ *é uma palavra reduzida (aqui estamos considerando o primeiro* 1_G *que aparece com elemento de* T_0, *o transversal para* $i_0(A)$*);*

(c) Também $1_G\, p^{-1}\, 1_G$ é uma palavra reduzida (vendo o primeiro 1_G com elemento de T_1);

(d) Mais geralmente, $1_G\, p^1\, 1_G\, p^1\, \ldots\, 1_G\, p^1\, 1_G$ e $1_G\, p^{-1}\, 1_G\, p^{-1}\, \ldots\, 1_G\, p^{-1}\, 1_G$ são palavras reduzidas.

Teorema 1.5.1 ***(Forma Normal para extensões HNN)*** *Seja $\mathbb{H}$ a extensão HNN de G com letra estável p e subgrupos associados $i_0(A)$ e $i_1(A)$. Sejam T_0 e T_1 transversais à esquerda para $i_0(A)$ e $i_1(A)$ em G, respectivamente. Então:*

(i) qualquer elemento h de $\mathbb{H}$ "pode ser representado" por uma palavra reduzida

$$g_0' p^{\varepsilon_0} g_1' p^{\varepsilon_1} \ldots g_{n-1}' p^{\varepsilon_{n-1}} g_n'$$

onde $n \geq 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$; $g_i' \in T_0$ se $\varepsilon_i = 1$, $g_i' \in T_1$ se $\varepsilon_i = -1$; $g_i' \neq 1$ se $\varepsilon_{i-1} = -\varepsilon_i$ e $g_n' \in G$ é arbitrário.

(ii) a todo elemento h de $\mathbb{H}$ podemos associar uma única *palavra reduzida.*

(iii) a aplicação canônica $j : G \to \mathbb{H} = \dfrac{G * \langle p \rangle}{N}$ é um monomorfismo. Assim, identificando $j(g)$ com g, todo elemento de $\mathbb{H}$ pode ser unicamente representado por uma palavra reduzida.

Demonstração:

(i) Mostremos que qualquer elemento $h \in \mathbb{H}$ pode ser representado por uma palavra reduzida. Para qualquer elemento $h \in \mathbb{H} = \dfrac{G * \langle p \rangle}{N}$, temos que $h = u\,N$, com $u \in G * \langle p \rangle$. Vamos representar o elemento $u\,N$ do quociente por $\overline{u}$. Pela construção do produto livre temos que G e p geram $G * \langle p \rangle$. Assim, u pode ser escrito como $g_0 p^{r_0} g_1 p^{r_1} \ldots g_{n-1} p^{r_{n-1}} g_n p^{r_n}$ com $g_i \in G$, $r_i \in \mathbb{Z}$ e $h = \overline{u}$. Por um abuso de notação, vamos escrever $h = g_0 p^{r_0} g_1 p^{r_1} \ldots g_{n-1} p^{r_{n-1}} g_n p^{r_n}$. Lembremos então que em $\mathbb{H}$ temos as relações

$$i_0(a)\, p = p\, i_1(a) \quad \text{ou} \quad i_1(a)\, p^{-1} = p^{-1}\, i_0(a), \quad a \in A \qquad (*)$$

(ou, mais rigorosamente, $i_0(a)\, p\, N = p\, i_1(a)\, N$ ou $i_1(a)\, p^{-1}\, N = p^{-1}\, i_0(a)\, N$, $a \in A$). Queremos obter uma forma reduzida para h. Para entender como obter uma tal forma, suponhamos por exemplo que h (ou melhor, u) é do tipo $g_0p^2g_1$. Considerando que G é a reunião disjunta das classes laterais, $G = \bigcup g'_j.i_0(A),\ g'_j \in T_0$, obtemos que $h = g_0p^2g_1 = (g'_0 i_0(a_0))p\ p\ g_1$, com $g'_0 \in T_0$ e $i_0(a_0) \in i_0(A)$. Da relação $(*)$, temos que, em $\mathbb{H}$, $i_0(a_0)p = p\ i_1(a_0)$, donde $h = g'_0\ p\ i_1(a_0)\ p\ g_1$. Agora, para o elemento $i_1(a_0)$ de G, temos que $i_1(a_0) = g'_1 i_0(a_1)$ e usando a relação $(*)$ para $i_0(a_1)p$, vem que $h = g'_0\ p\ g'_1\ p\ i_1(a_1)\ g_1 = g'_0\ p\ g'_1\ p\ g'_2$ (onde tomamos $g'_2 := i_1(a_1)g_1 \ \in G$. Se partimos de um elemento de $G * \langle p\rangle$ do tipo $g_0p^{-2}g_1$ raciocinamos de modo similar, considerando nesse caso que G é a reunião disjunta das classes laterais, $G = \bigcup g'_k.i_1(A),\ g'_k \in T_1$, e usando a outra relação em $(*)$. Combinado esses dois casos pode-se mostrar, indutivamente, que podemos representar um elemento qualquer h de $\mathbb{H}$ na forma reduzida. Para ser mais preciso, o que obtemos é $h = u'\,N = \overline{u'}$, onde $u' = g'_0\ p^{\varepsilon_0}\ g'_1\ p^{\varepsilon_1}\ \ldots\ g'_{n-1}\ p^{\varepsilon_{n-1}}\ g'_n$ está na forma reduzida.

(ii) Para mostrar a unicidade, considere S o conjunto de todas as seqüências $(g'_0, \varepsilon_0, g'_1, \varepsilon_1, \ldots g'_{n-1}, \varepsilon_{n-1}, g'_n)$ (associadas a palavras reduzidas). A idéia é definir um homomorfismo $\psi : \mathbb{H} \to \mathcal{B}_{ij}(S)$ que satisfaz a seguinte condição :

(1) Se $h \in \mathbb{H}$ e $h = \overline{g'_0p^{\varepsilon_0}g'_1p^{\varepsilon_1}\ldots g'_{n-1}p^{\varepsilon_{n-1}}g'_n}$, com $g'_0p^{\varepsilon_0}g'_1p^{\varepsilon_1}\ldots g'_{n-1}p^{\varepsilon_{n-1}}g'_n$ uma palavra reduzida, então $\psi(h)(1_G) = (g'_0, \varepsilon_0, g'_1, \varepsilon_1, \ldots g'_{n-1}, \varepsilon_{n-1}, g'_n)$, donde se conclui, usando a igualdade de sequências, que existe uma única palavra reduzida em cada classe de equivalência, a qual é usada para representar o elemento (a classe) de $\mathbb{H}$. Para obter tal homomorfismo, primeiro definimos um homomorfismo $\phi : G \to \mathcal{B}_{ij}(S)$. Também definimos um elemento $\tau \in \mathcal{B}_{ij}(S)$ (associado a p), de modo que ϕ e τ satisfazem:

$$\phi(i_0(a)) \circ \tau = \tau \circ \phi(i_1(a)),\ \forall\ a \in A.\ (2)$$

Considerando então tais homomorfismos obtemos um homomorfismo $\varphi : G * < p > \to B_{ij}(S)$ definido naturalmente como $\varphi(g) = \phi(g)$ para todo g em G, e $\varphi(p) = \tau$. Da relação (2), ou equivalentemente $\varphi(i_0(a)) \circ \varphi(p) = \varphi(p) \circ \varphi(i_1(a))$, segue que N, o menor subgrupo normal em $G * P$ gerado por $\{p^{-1}\, i_0(a)\, p\, i_1(a)^{-1},\ a \in A\}$, está contido em $Ker(\varphi)$, donde obtemos bem definida uma aplicação $\psi : \mathbb{H} = \dfrac{G * \langle p\rangle}{N} \to \mathcal{B}_{ij}(S)$, satisfazendo $\psi(j(g)) = \varphi(g)$, $\psi(p) = \tau$ que satisfará a condição inicial (1) desejada. Vamos definir então ϕ e τ:

• $\phi : G \to \mathcal{B}_{ij}(S)$; $g \to \phi(g) : S \to S$, é definida por $\phi(g)(g_1, \varepsilon_1, \ldots, g_{n-1}, \varepsilon_{n-1}, g_n) = (g_1, \varepsilon_1, \ldots, g_{n-1}, \varepsilon_{n-1}, (g_n.g))$. Temos que $\phi(g) \in \mathcal{B}_{ij}(S)$ pois existe $(\phi(g))^{-1} = \phi_{g^{-1}}$.

• Para definir a permutação τ (correspondente a p), temos que considerar alguma situações:

Escreva $g_n = g' i_0(a)$, com $g' \in T_0$ e $a \in A$.

Se $g' \neq 1_G$, definimos $\tau(g_1, \varepsilon_1, \ldots g_{n-1}, \varepsilon_{n-1}, g_n) = (g_1, \varepsilon_1, \ldots g_{n-1}, \varepsilon_{n-1}, g', 1, i_1(a))$.

Se $g' = 1_G$, isto é, $g_n = i_0(a)$, $a \in A$ então $\tau(g_1, \varepsilon_1, \ldots g_{n-1}, \varepsilon_{n-1}, g_n) =$

$$\begin{cases} (g_1, \varepsilon_1, \ldots g_{n-1}, 1, 1_G, 1, i_1(a)) & \text{se } \varepsilon_{n-1} = 1 \\ (g_1, \varepsilon_1, \ldots g_{n-1}.i_1(a)), & \text{se } \varepsilon_{n-1} = -1 \end{cases}$$

Pode-se mostrar que $\tau \in \mathcal{B}_{ij}(S)$ e ϕ e τ satisfazem (2).

A partir daí, obtemos então o homomorfismo $\psi : \mathbb{H} \to \mathcal{B}_{ij}(S)$ desejado (tal que $\psi(p) = \tau$ e $\psi \circ j = \phi$), e satisfazendo a condição (1), donde obtemos a unicidade da expressão reduzida para $h \in \mathbb{H}$.

(iii) Considerando a aplicação ϕ definida no item anterior, temos que ϕ é um *monomorfismo*. De fato, se $\phi(g) = id_{\mathcal{B}_{ij}(S)}$, teremos $1_G\, g = \phi(g)(1_G) = id(1_G) = 1_G$ o que nos leva a $g = 1_G$. Agora, do fato que $\psi \circ j = \phi$, segue que j é monomorfismo.

■

Observação 1.5.2 *Se h é escrito como no Teorema 1.5.1 (i), devemos chamar n o comprimento de h.*

Capítulo 2

Grafos e Árvores

Neste capítulo, como já mencionamos na introdução, temos como objetivo a familiarização com alguns conceitos e resultados da teoria de grafos, uma vez que existe uma correspondência entre decomposição de grupos e ação de grupos sobre árvores (para maiores detalhes, indicamos [18] e [19]). Além disso, os resultados de Kropholler e Roller que iremos analisar no Capítulo 4 são fortemente baseados neste fato.

2.1 Grafos

Definição 2.1.1 *Um grafo* Γ *consiste de um conjunto* X*, usualmente denotado por* $vert(\Gamma)$*, um conjunto* Y*, denotado por* $aresta(\Gamma)$ *e duas aplicações*

$$\begin{aligned} Y &\to X \times X \\ e &\mapsto (o(e), t(e)) \end{aligned} \qquad e \qquad \begin{aligned} Y &\to Y \\ e &\mapsto e^{-1} \end{aligned}$$

que satisfazem as seguintes condições:

$$(e^{-1})^{-1} = e;\ \ e^{-1} \neq e;\ \ o(e) = t(e^{-1}), \text{ para cada } e \in Y.$$

Um elemento $P \in X$ *é chamado um* vértice *de* Γ*; um elemento* $e \in Y$ *é chamado uma* aresta orientada *e* e^{-1} *é chamada de* aresta inversa *de* e*. O vértice* $o(e) = t(e^{-1})$ *é chamado* origem *de* e*, e o vértice* $t(e) = o(e^{-1})$ *é chamado o* término *de* e*.*

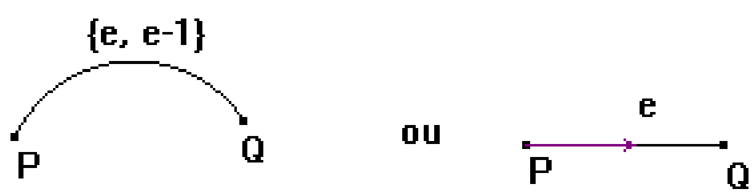
Estes dois vértices são chamados extremidades *de* e. *Dizemos que dois vértices são* adjacentes *se eles são extremidades de alguma aresta.*

Seja $\Gamma = \Gamma(X, Y)$ *um grafo. Um* subgrafo $\Upsilon \subset \Gamma$ *consiste de um conjunto* $X' \subset X = vert(\Gamma)$, *um conjunto* $Y' \subset Y = aresta(\Gamma)$ *e duas aplicações* $Y' \to X' \times X'$; $e \mapsto (o(e), t(e))$ *e* $Y' \to Y'$; $e \mapsto e^{-1}$, *induzidas das aplicações de* Γ, *satisfazendo as condições anteriores.*

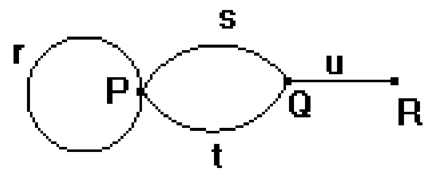
Considere $\Gamma_1 = \Gamma_1(X_1, Y_1)$ e $\Gamma_2 = \Gamma_2(X_2, Y_2)$ grafos com X_1 e X_2 seus conjuntos de vértices e Y_1 e Y_2 seus conjuntos de arestas, respectivamente. Uma *aplicação (ou morfismo)* $\alpha : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ entre os grafos é uma aplicação tal que $\alpha(X_1) \subseteq X_2$, $\alpha(Y_1) \subseteq Y_2$, e para cada $e \in Y_1$, $\alpha(o(e)) = o(\alpha(e))$ e $\alpha(t(e)) = t(\alpha(e))$. Dizemos que dois grafos $\Gamma_1 = \Gamma_1(X_1, Y_1)$ e $\Gamma_2 = \Gamma_2(X_2, Y_2)$ são *isomorfos* se existem morfismos $\alpha : \Gamma(X_1, Y_1) \to \Gamma(X_2, Y_2)$ e $\beta : \Gamma(X_2, Y_2) \to \Gamma(X_1, Y_1)$ tais que $\alpha \circ \beta$ e $\beta \circ \alpha$ são aplicações identidades.

Uma *orientação* de um grafo Γ é um subconjunto Y_+ de $Y = aresta(\Gamma)$ tal que Y é a união disjunta de Y_+ e ${Y_+}^{-1} = \{e^{-1}; e \in Y_+\}$. Claramente um tal subconjunto sempre existe. Um *grafo orientado* é definido, a menos de isomorfismo, por dois conjuntos X e Y_+ e uma aplicação $Y_+ \to X \times X$. O conjunto correspondente de arestas é $Y = Y_+ \bigsqcup {Y_+}^{-1}$, onde ${Y_+}^{-1}$ denota uma cópia de Y_+.

Na prática, um grafo é freqüentemente representado por um diagrama, usando a seguinte convenção: um ponto marcado no diagrama corresponde a um vértice do grafo, e um segmento ou arco unindo dois pontos (marcados) corresponde a um conjunto de arestas da forma $\{e, e^{-1}\}$. Por exemplo, o grafo tendo dois vértices P, Q e duas arestas e, e^{-1} com $P = o(e)$, $Q = t(e)$ é representado pelo diagrama



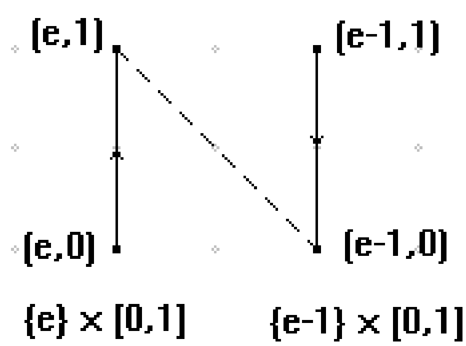
Similarmente, o diagrama



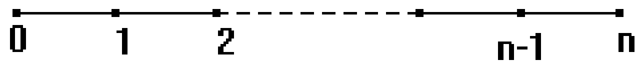
representa um grafo com três vértices, P, Q, R e oito arestas r, s, t, u, r^{-1}, s^{-1}, t^{-1}, u^{-1}; além disso, r, s, t, u têm extremidades $\{P,P\}$, $\{P,Q\}$, $\{P,Q\}$, $\{Q,R\}$, respectivamente. Temos $o(r) = P = t(r)$, mas o diagrama não nos diz, por exemplo, se P é a origem ou o término da aresta s.

Realização de um grafo Seja Γ um grafo e seja $X = vert(\Gamma)$, $Y = aresta(\Gamma)$. Podemos considerar o espaço topológico U formado pela união disjunta de X e $Y \times [0,1]$, onde X e Y são providos com a topologia discreta. Seja R a relação de equivalência "mais fina" sobre U para os quais $(e,t) \equiv (e^{-1}, 1-t)$, $(e,0) \equiv o(e)$ e $(e,1) \equiv t(e)$ para $e \in Y$ e $t \in [0,1]$. O espaço quociente $real(\Gamma) = U/R$ é chamado *realização do grafo* Γ.

Por exemplo, se $X = \{P,Q\}$; $Y = \{e, e^{-1}\}$, $real(\Gamma) = \dfrac{X \bigsqcup (Y \times [0,1])}{R}$ e as identificações são como indicadas na figura abaixo:

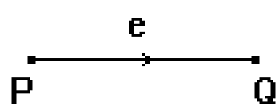


Definição 2.1.2 *(caminho) Seja $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Considere o grafo orientado Cam_n:*



Tal grafo possui $n+1$ *vértices* $0, 1, \ldots, n$ *e orientação dada pelas* n *arestas* $[i, i+1]$, $0 \leq i < n$, *com* $o([i, i+1]) = i$ *e* $t([i, i+1]) = i+1$. *Um* caminho *(de comprimento* n*) em um grafo* Γ *é um morfismo* $c : Cam_n \to \Gamma$.

Exemplo 2.1.1 *Um grafo isomorfo a* Cam_1 *como na figura abaixo é chamado de segmento.*

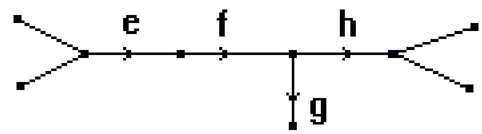


Para $n \geq 1$, a seqüência $(e_1, \ldots, e_n)$ de arestas $e_i = c([i, i+1])$ tal que $t(e_i) = o(e_{i+1})$, $1 \leq i < n$, determina c; tal seqüência de arestas será também denotada por c. Se $P_i = c(i)$, dizemos que c é um *caminho* de P_0 a P_n e que P_0 e P_n são as extremidades do caminho.

Um par da forma $(e_i, e_{i+1}) = (e_i, {e_i}^{-1})$ em um caminho é chamado um *"backtracking"*.

Observação 2.1.1 *Se* $c = (e_1, \ldots, e_i, e_{i+1}, e_{i+2}, \ldots, e_n)$ *é um caminho de* P *a* Q *com um "backtracking"do tipo* $(e_i, e_{i+1}) = (e_i, {e_i}^{-1})$ *podemos construir a partir de* c *um caminho (de comprimento* $n-2$*) que não possui um tal "backtracking". Basta tomar o caminho dado pela seqüência* $(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+2}, \ldots, e_n)$. *Por indução, concluímos que se existe algum caminho de* P *a* Q *em um grafo* Γ *então existe um caminho sem "backtracking" ligando* P *a* Q.

Por exemplo, se considerarmos o grafo (onde estamos indicando a orientação para as arestas e, f, g e h),

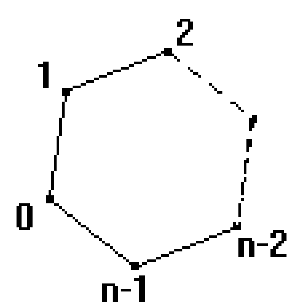


então $c = (e, f, g, g^{-1}, h)$ é um caminho com um "backtracking". Já o caminho $c_1 = (e, f, h)$ não possui "backtracking".

Definição 2.1.3 *Um* caminho (reduzido) de arestas *em um grafo* Γ *é uma seqüência* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de arestas tal que* $t(e_i) = o(e_{i+1})$ *e* $e_i \neq {e_{i+1}}^{-1}$*, para* $i = 1, 2, \ldots, n-1$*, ou seja, é um caminho sem "backtracking". Se* e*,* f *são arestas de* Γ*, escrevemos:* $e \leq f$ *se existe um* caminho (reduzido) de arestas *com* $e_1 = e$ *e* $e_n = f$*.*

Observação 2.1.2 *Para alguns autores,* caminho *em um grafo já significa* caminho (reduzido) de arestas.

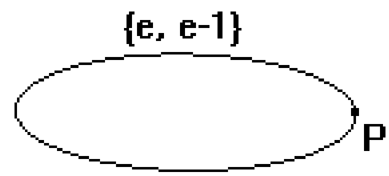
Definição 2.1.4 *Seja* $n \in \mathbb{Z}$*,* $n \geq 1$*. Consideremos o grafo orientado* $Circ_n$*,*



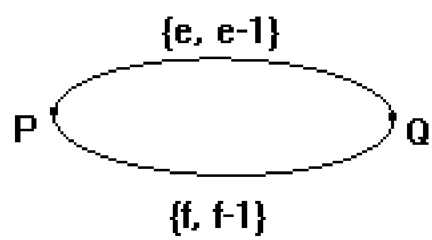
com conjunto de vértices $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *e orientação dada pelas* n *arestas* $[i, i+1]$ $(i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$*, com* $o([i, i+1]) = i$ *e* $t([i, i+1]) = i + 1$*. (Note que* $[n-1, n] = [n-1, 0]$ *e* $t([n-1, n]) = n = 0$ *em* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*). Um circuito (de comprimento* n*) em um grafo* Γ *é qualquer subgrafo isomorfo a* $Circ_n$*. Um tal subgrafo é definido por um caminho*

$(e_1, \ldots, e_n)$ *sem "backtracking", tal que os* $P_i = t(e_i)$ $(1 \leq n \leq n)$ *são distintos e com* $P_n = o(e_1)$. *Um circuito de comprimento 1 é chamado um laço (ou loop).*

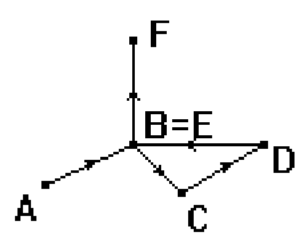
Exemplo 2.1.2 *Para* $n = 1$, *o laço* $Circ_1$ *é assim representado:*



Para $n = 2$, $Circ_2$ *é representado da seguinte forma:*



Note que um caminho como na figura abaixo é um caminho sem "backtracking"e que possui um circuito.



Definição 2.1.5 *Um grafo é dito* conexo *se quaisquer dois vértices são extremidades de pelo menos um caminho. Os subgrafos conexos maximais (sob a relação de inclusão) são chamados de componentes conexas de um grafo.*

Pode-se mostrar que um grafo é conexo se, e somente se, sua realização é conexa (ou conexa por caminhos, o que é equivalente). Mais geralmente, as componentes conexas de um grafo correspondem à aquelas de sua realização.

Observação 2.1.3 *Pode-se verificar que a relação $\leq$ entre arestas de um grafo Γ, dada na Definição 2.1.3, isto é, $e \leq f$ se existe um* caminho de arestas *com $e_1 = e$ e $e_n = f$ tem as seguintes propriedades ([18], p. 183):*
(A) Para qualquer grafo Γ, a relação $\leq$ é reflexiva e transitiva.
(B) Para qualquer grafo Γ e quaisquer arestas e e f de Γ, se $e \leq f$ então $f^{-1} \leq e^{-1}$.
(C) O grafo Γ é conexo se, e somente se, para qualquer par e, f de arestas de Γ, pelo menos uma destas relações $e \leq f$, $e \leq f^{-1}$, $e^{-1} \leq f$, $e^{-1} \leq f^{-1}$ valem.
(D) O grafo Γ não possui circuitos se, e somente se, $e \leq f$ e $f \leq e$ implicar $e = f$.
(E) Se Γ não possui circuitos, então para nenhum par e, f de arestas podemos ter $e \leq f$ e $e \leq f^{-1}$.
(F) Se Γ não possui circuitos então para qualquer par e, f de arestas existe apenas um número finito de arestas g com $e \leq g \leq f$.

Recordemos que uma relação que satisfaz as condições (A) e (D), é chamada de *relação de ordem parcial.* Assim, se um grafo Γ não possui circuitos a relação $\leq$ é uma relação de ordem parcial sobre Γ.

O grafo $\Gamma(G, S)$ Sejam G um grupo e S um subconjunto de G. Vamos denotar por $\Gamma = \Gamma(G, S)$ o grafo orientado tendo G como seu conjunto de vértices, $G \times S = (aresta(\Gamma))_+$ como sua orientação, e aplicações definidas por $o(g, s) = g$ e $t(g, s) = gs$ para cada aresta $(g, s) \in G \times S$.

Definição 2.1.6 *Recordemos que se G é um grupo e M é um conjunto não vazio, uma G-*ação *sobre M é uma aplicação $G \times M \to M$, $(g, m) \mapsto gm$, tal que $1m = m$ para todo $m \in M$, e $g(g'm) = (gg')m$, para todos $g, g' \in G$, $m \in M$. Dizemos que a ação é* trivial *ou que G* age trivialmente *sobre M, se $gm = m$ para todo $g \in G$ e todo $m \in M$. Ainda, G age* livremente *sobre um conjunto M se o* estabilizador *de m, isto é, $G_m := \{g \in G; gm = m\}$, for trivial, ou seja, igual ao elemento neutro 1* *de G, para todo $m \in M$. Para um vértice P de um grafo Γ, denotaremos a órbita de P por $\mathcal{O}(P)$, isto é, $\mathcal{O}(P) = \{gP; g \in G\} = G.P$ e para uma aresta e de Γ denotaremos a órbita de e por $\mathcal{O}(e)$, isto é, $\mathcal{O}(e) = \{ge; g \in G\} = Ge$.*

Pode-se verificar que se G é um grupo, S um subconjunto de G e $\Gamma = \Gamma(G, S)$ o grafo associado, então a multiplicação à esquerda por elementos de G (de modo que $h \in G$ leva um vértice g no vértice hg, e uma aresta (g, s) na aresta (hg, s)) define uma ação de G sobre Γ. Note que se $e = (g, s)$ então $o(he) = hg = ho(e)$ e $t(he) = (hg)s = h(gs) = ht(e)$. Tal ação preserva orientação e além disso, G age livremente sobre os vértices e sobre as arestas de Γ.

Analogamente, define-se G-ação à direita sobre M.

Observação 2.1.4 *([9], p.26) Verifica-se que se $x \in G$ e $x^2 = 1$ então existe uma aresta ligando g a gx e também outra ligando gx a $gx^2 = g$. Somente neste caso, existe mais que uma aresta ligando dois vértices (adjacentes) dados.*

Exemplo 2.1.3 *Seja G um grupo cíclico de ordem n gerado por a e $S = \{a\}$. Para $n = 1$, o diagrama de $\Gamma(G, S)$ é isomorfo a $Circ_1$, para $n = 2$ o diagrama de $\Gamma(G, S)$ é isomorfo a $Circ_2$, mais geralmente, para $n < \infty$, $\Gamma(G, S) \simeq Circ_n$. Agora, se $G = \mathbb{Z}$ o grupo cíclico infinito gerado por $S = \{a\}$ então $\Gamma(G, S)$ tem como vértices o conjunto $\{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ e arestas $[a^n, a^{n+1}], n \in \mathbb{Z}$ (e cuja realização geométrica é $\mathbb{R}$).*

Proposição 2.1.1 *([19], p.17) Seja $\Gamma = \Gamma(G, S)$ o grafo definido por um grupo G e um subconjunto S de G.*

(a) Γ é conexo se, e somente se, S gera G.

(b) Γ contém um laço se, e somente se, $1 \in S$.

Demonstração:

(a) Para todo $g \in G$, como $\Gamma(G, S)$ é conexo, existem arestas e_1, e_2, ..., e_k que ligam g a 1_G (o elemento neutro do grupo G). Daí, existem s_1, s_2, ..., $s_k \in S$ tais que os vértices iniciais ou finais dessas arestas são (de acordo com a sequência):

$$g,\ g{s_1}^{\varepsilon_1},\ g{s_1}^{\varepsilon_1}{s_2}^{\varepsilon_2},\ \ldots, g{s_1}^{\varepsilon_1}\ldots{s_k}^{\varepsilon_k} = 1_G$$

onde $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, k$. Assim, $g = {s_k}^{r_k}\ldots{s_1}^{r_1}$, com $r_i = -\varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, k$. Logo, $g \in \langle S\rangle$ e daí, $G = \langle S\rangle$. Reciprocamente, se S gera G, para todo g_1, $g_2 \in G$, temos $g_1 = {s_1}^{r_1}\ldots{s_k}^{r_k}$ e $g_2 = {s_{k+1}}^{r_{k+1}}\ldots{s_n}^{r_n}$, onde $r_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$. Multiplicando g_1 à direita, sucessivamente por ${s_k}^{-r_k}$, ..., ${s_1}^{-r_1}$, teremos arestas ligando g_1 a 1_G. Analogamente, temos arestas ligando g_2 a 1_G. Portando temos um caminho (de arestas) ligando g_1 a g_2 e assim, $\Gamma(G, S)$ é conexo.

(b) Claro, pois $gs = g \Leftrightarrow s = 1$. ■

Definição 2.1.7 *Quando G é finitamente gerado e S um conjunto de geradores de G, o grafo $\Gamma(G, S)$ é chamado de* grafo de Cayley *de G.*

Observação 2.1.5 *Alguns autores usam o termo* grafo de Cayley *mesmo quando S não é um conjunto de geradores de G e outros exigem que o elemento neutro de G não pertença a S (de modo que $\Gamma(G, S)$ não contenha laço).*

Árvores

Definição 2.1.8 *Uma* árvore *é um grafo conexo não vazio sem circuitos e uma* sub-árvore *de um grafo Γ é um subgrafo de Γ que é uma árvore.*

Como uma árvore Γ é um grafo conexo, dados quaisquer dois pontos P e Q em Γ, existe um caminho (reduzido) de arestas ligando P a Q.

Logo, se Γ é uma árvore, a relação descrita anteriormente $\leq$ sobre o conjunto de arestas de Γ, $aresta(\Gamma)$, é uma ordem parcial e todas as outras condições valem.

Definição 2.1.9 *Uma* geodésica *em uma árvore Γ é um caminho (reduzido) de arestas em Γ, isto é, um caminho sem "backtracking", ou seja, sem um par da forma $(e_i, e_{i+1}) = (e_i, {e_i}^{-1})$, onde e_i, e_{i+1}, ${e_i}^{-1}$ indicam arestas.*

Proposição 2.1.2 *Sejam P e Q dois vértices de uma árvore Γ. Existe exatamente uma geodésica $(e_1, \ldots, e_n)$ de P a Q. Além disso, todos os vértices $o(e_i)$ são distintos.*

Demonstração: Obviamente, como uma árvore é conexa e sem circuitos, existe uma geodésica unindo quaisquer dois vértices. Se $(e_1, \ldots, e_n)$ é qualquer geodésica e se $o(e_i) = o(e_j)$ para algum $i < j$, então o caminho $(e_i, \ldots, {e_j}^{-1})$ deveria ser um circuito, o que contradiz o fato de Γ ser uma árvore. Finalmente, se $(e_1, \ldots, e_n)$ e $(f_1, \ldots, f_m)$ são duas geodésicas de P a Q, então o caminho $(e_1, \ldots, e_n, {f_m}^{-1}, \ldots, {f_1}^{-1})$ seria um circuito não trivial em P a menos que $e_n = f_m$. Por indução, segue que $m = n$ e que $e_i = f_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. ■

Definição 2.1.10 *O comprimento da geodésica de P a Q é chamado* distância *de P a Q e é denotado por $l(P, Q)$. Temos $l(P, Q) = 0$ se, e somente se, $P = Q$ e $l(P, Q) = 1$ se, e somente se, P e Q são adjacentes.*

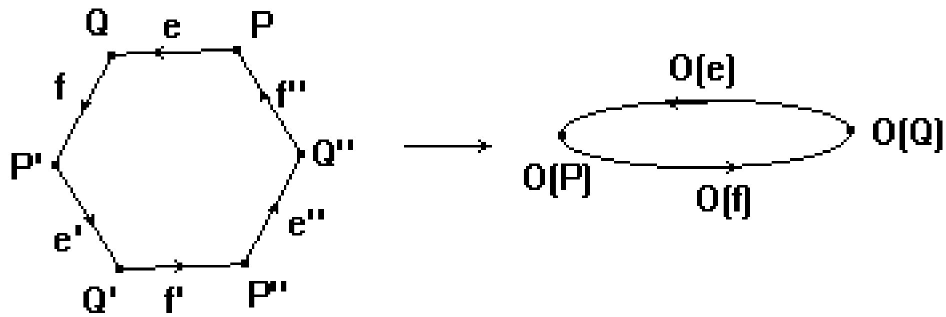
2.2 Árvores e produtos livres amalgamados

Definição 2.2.1 *Seja Γ um grafo sobre o qual um grupo G age. Dizemos que G age sobre Γ sem inversões se sempre que um elemento $g \in G$ fixa uma aresta e de Γ, g fixa também as extremidades de e, ou seja, $ge = e^{-1}$ nunca ocorre.*

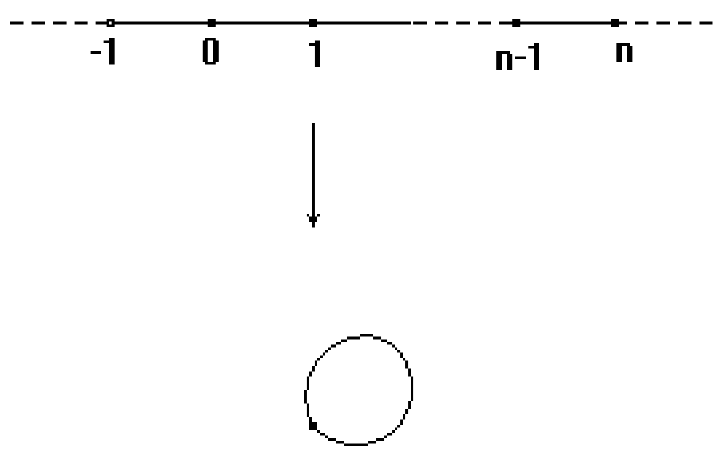
Se G age sem inversões, podemos definir o *grafo quociente* $G\backslash\Gamma$ de maneira óbvia: o conjunto de vértices de $G\backslash\Gamma$ é o conjunto $vert(\Gamma)$ sob a ação de G (conjunto das órbitas $\mathcal{O}(P) = G.P$ dos vértices P de Γ pela ação de G) e o conjunto de arestas de $G\backslash\Gamma$ é o conjunto $aresta(\Gamma)$ sob a ação de G (conjunto das G-órbitas $\mathcal{O}(e) = G.e$ das arestas e de Γ). Note que as aplicações o e t para o grafo quociente são tais que $o(G.e) = G.o(e)$ e $t(G.e) = G.t(e)$ e existe uma aplicação bem definida $\Gamma \to G\backslash\Gamma$ tal que $x \mapsto \mathcal{O}(x) = G.x$.

Exemplo 2.2.1 *Considere o grafo $Circ_n$ que indica o n-ciclo ou o n-circuito. Temos que o grupo cíclico $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ atua sobre o grafo $Circ_6$ por rotação de $120°$ e o quo-*

ciente é $Circ_2$, pois $\mathcal{O}(P) = \{P, P', P''\}$, $\mathcal{O}(Q) = \{Q, Q', Q''\}$, $\mathcal{O}(e) = \{e, e', e''\}$ e $\mathcal{O}(f) = \{f, f', f''\}$.



Exemplo 2.2.2 *Considere o grafo Γ cuja realização geométrica é $\mathbb{R}$, onde $vert(\Gamma) = \{n; n \in \mathbb{Z}\}$, $aresta(\Gamma) = \{[i, i+1], i \in \mathbb{Z}\}$ e a $\mathbb{Z}$-ação é dada por $k.[i, i+1] = [k+i, k+i+1]$. Temos que $\mathbb{Z}$ atua sem inversão e o grafo quociente é um laço, pois $\mathcal{O}(0) = \{k+0; k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ e todas as arestas de Γ estão na classe da aresta e_0, onde $e_0 = [0, 1]$.*



Proposição 2.2.1 *([19], Proposição 14, p. 25) Seja Γ um grafo conexo, sobre o qual um grupo G age sem inversões. Toda sub-árvore T de $G\backslash\Gamma$ se levanta a uma sub-árvore de Γ via a aplicação quociente $\Gamma \to G\backslash\Gamma$.*

Demonstração: A demonstração é existencial e para isso, usaremos o Lema de Zorn. Precisamos mostrar que existe uma sub-árvore de Γ que é aplicada injetivamente sobre T. Considere o conjunto Ω de sub-árvores de Γ que projetam injetivamente sobre T. Então Ω é não vazio, uma vez que existe pelo menos uma árvore formada por um único ponto e, além disso, se T_i, $i \in I$ é um subconjunto totalmente ordenado (pela inclusão) de Ω, então a união T_0 é novamente uma árvore e deve projetar-se injetivamente em T, pois quaisquer dois pontos de T_0 estão em algum T_i, $i \in I$ que se projetam em T. Assim, $T_0 \in \Omega$ e portanto, toda família totalmente ordenada tem um elemento maximal em Ω. Seja $\tilde{T}$ este elemento maximal de Ω. Chamamos de T' a imagem de $\tilde{T}$ em $G\backslash\Gamma$. Agora, $T' \subset T$. Suponha, se possível, que $T' \neq T$. Então, pela conexidade de T, existe uma aresta e de T que se inicia em um vértice de T', e termina em um vértice de T que não pertence a T'. Seja $\tilde{e}$ o levantamento de e. Como $g\tilde{e}$ com $g \in G$, é também um levantamento de e, podemos substituir $\tilde{e}$ por uma aresta $g\tilde{e}$ adequada e assumir que $o(\tilde{e})$ pertence a $\tilde{T}$. Note que $t(\tilde{e})$ não pertence a $\tilde{T}$, uma vez que sua imagem em $G\backslash\Gamma$ não é um vértice de T'. Tomando $\hat{T}$ o grafo derivado de $\tilde{T}$ por adicionar o vértice $P = t(\tilde{e})$ e as arestas $\tilde{e}$ e $\tilde{e}^{-1}$, temos que $\hat{T}$ é uma árvore. Mas, a aplicação $\hat{T} \to T$ é injetiva, o que contradiz a maximalidade de $\tilde{T}$; portanto $T' = T$. ■

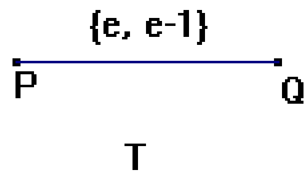
Definição 2.2.2 *Seja Γ um grafo não vazio. Considerando o conjunto de sub-árvores de Γ, ordenado pela inclusão, teremos, pelo Lema de Zorn, que existe um elemento maximal. Tal elemento maximal é chamado uma* árvore maximal de Γ. *Seja Υ um grafo conexo no qual G age sem inversões. Uma* árvore de representantes de Υ *mod G é qualquer sub-árvore T de Υ que é o levantamento de uma árvore maximal em $\Gamma = G\backslash\Upsilon$.*

Exemplo 2.2.3 *Se considerarmos o grafo $\Gamma = Circ_6$ com a ação de $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (Exemplo 2.2.1) então a sub-árvore T' formada pelos vértices dados pelas classes (órbitas) $\mathcal{O}(P)$, $\mathcal{O}(Q)$ e aresta dada pela classe de e se levanta nas sub-árvores $\tilde{T} = \{P, Q, e\}$, $\tilde{T}' = \{P', Q', e'\}$ e $\tilde{T}'' = \{P'', Q'', e''\}$.*

Agora, T' é uma árvore maximal no quociente $G\backslash\Gamma$, assim, $\tilde{T}$, $\tilde{T}'$ e $\tilde{T}''$ são árvores de representantes de Γ mod G.

2.2.1 Domínio fundamental e decomposição de grupos

Nesta seção, caracterizaremos os grupos que são produtos livres com subgrupo amalgamado da forma $G_P *_{G_e} G_Q$ com grupos agindo sobre árvores com *domínio fundamental* um segmento. Lembremos que um *segmento* indica um grafo T isomorfo a Cam_1, como na figura abaixo:



Definição 2.2.3 *Seja G um grupo agindo sem inversões sobre um grafo Γ. Um* domínio fundamental de Γ *mod G é um subgrafo T de Γ tal que $T \to G\backslash\Gamma$ é um isomorfismo.*

Um domínio fundamental pode não existir, pois para $\Gamma = \mathbb{R}$ e $G \simeq \mathbb{Z}$ como no Exemplo 2.2.2, não existe em Γ nenhum subgrafo T tal que T é isomorfo ao grafo quociente que é um laço.

Se $G\backslash\Gamma$ é uma árvore, segue da Proposição 2.2.1 que um domínio fundamental existe. Se Γ é uma árvore, a recíproca também é verdadeira:

Proposição 2.2.2 *([19], Proposição 17) Seja G um grupo agindo sobre uma árvore Γ. Um domínio fundamental de Γ mod G existe se, e somente se, $G\backslash\Gamma$ é uma árvore.*

$\blacksquare$

Teorema 2.2.1 *Seja G agindo sobre um grafo Γ. Seja T um segmento em Γ que é um domínio fundamental de Γ mod G. Sejam P, Q os vértices de T, com aresta $\{e, e^{-1}\}$ ligando P e Q. Sejam G_P, G_Q e $G_e = G_{e^{-1}}$ os estabilizadores dos vértices P e Q e aresta e de T. As seguintes propriedades são então equivalentes:*

1. *Γ é uma árvore.*

2. *O homomorfismo $G_P *_{G_e} G_Q \to G$ induzido pelas inclusões $G_P \to G$ e $G_Q \to G$ é um isomorfismo.*

Note que $G_e = G_P \cap G_Q$ é um subgrupo de G_P e de G_Q, portanto o produto livre amalgamado $G_P *_{G_e} G_Q$ faz sentido.

Para a prova deste teorema necessitamos dos dois lemas seguintes:

Lema 2.2.1 *Nas hipóteses do Teorema 2.2.1, temos que o grafo Γ é conexo se, e somente se, G é gerado por $G_P \cup G_Q$.*

Demonstração: Seja Γ' a componente conexa de Γ contendo o segmento T (domínio fundamental). Seja G' o estabilizador de Γ', isto é, $G' = \{g \in G; g\Gamma' = \Gamma'\}$ e seja G'' o subgrupo de G gerado por $G_P \cup G_Q$. Note que $G'' \subset G'$, pois se $h \in G_P \cup G_Q$ então os segmentos T e hT têm um vértice em comum; por exemplo, se $h \in G_P$, $hP = P$. Daí P é um vértice comum de T e hT. Então, temos $hT \subset \Gamma'$, uma vez que Γ' é a componente conexa que contém T. Portanto, $h\Gamma' = \Gamma'$, isto é, $h \in G'$; assim, $G_P \subset G'$ e $G_Q \subset G'$, e conseqüentemente, $G'' \subset G'$.

Agora, se $G_P \cup G_Q$ gera G então $G = G' = G''$ e portanto, $\Gamma' = G'\Gamma' = G\Gamma' \supset GT = \Gamma$. Logo, $\Gamma' = \Gamma$ e assim, Γ é conexo. Note que $GT = \Gamma$ porque T é domínio fundamental e assim, para todo $R \in vert(\Gamma)$, temos que $R = gP$ ou $R = gQ$, para algum g. Daí, $R \in GT$. De modo similar, para qualquer aresta $e \in \Gamma$, existe $g \in G$ tal que $ge = T$ e assim, $e = g^{-1}T \in GT$.

Por outro lado, suponha que Γ é conexo. Note que $G''T$ e $(G-G'')T$ são subgrafos disjuntos de Γ cuja união é Γ (se a união fosse não disjunta, então existiriam $x \in G''$, $y \in G-G''$ tais que $y^{-1}x$ fixa P ou Q ou $y^{-1}x$ envia P em Q ou Q em P. A primeira implicação contradiz o fato de que $y \notin G''$ e a última o fato de T ser um domínio fundamental). Se Γ é conexo e $T \subset G''T$, segue que $\Gamma = G''T$, e portanto temos que $\Gamma = G''T$. Mas grafo Γ é conexo e então $\Gamma = \Gamma'$, isto é, $G = G' = G''$. Portanto, $G'T = GT = \Gamma = G''T$. Isto implica que $G'' \subset G'$, pois se $x'' \in G''$ então

$x''\Gamma' = x''\Gamma = x''G''T = G''T = \Gamma = \Gamma'$. Portanto, $G'' = G' = G$, isto é, $G_P \cup G_Q$ gera G. ∎

Lema 2.2.2 *Nas condições do Teorema 2.2.1, temos que Γ não possui circuitos se, e somente se, $G_P *_{G_e} G_Q \to G$ é injetiva.*

Demonstração: Dizer que Γ possui um circuito é o mesmo que dizer que existe um caminho $c = (w_0, \ldots, w_n)$, $n \geq 1$ em Γ sem "backtracking" e tal que $o(c) = t(c)$. Escrevemos w_i na forma $h_i e_i$ com $h_i \in G$ e $e_i = e$ ou $e_i = e^{-1}$. Passando a $G\backslash\Gamma \simeq T$ vemos também que ${e_i}^{-1} = e_{i-1}$ $(1 \leq i \leq n)$. Seja $P_i = o(e_i) = t(e_{i-1})$; temos $h_i = h_{i-1}g_i$, com $g_i \in G_{P_i}$ pois $h_iP_i = h_io(e_i) = o(h_ie_i) = t(h_{i-1}e_{i-1}) = h_{i-1}t(e_{i-1}) = h_{i-1}P_i$ e $g_i \notin G_e$ pois $(h_ie_i)^{-1} \neq h_{i-1}e_{i-1}$.

O fato que $o(c) = t(c)$ é equivalente a $t(e_n) = P_0$, ou novamente, $h_0P_0 = h_nP_0 = h_0g_1 \ldots g_nP_0$, isto é, $g_1 \ldots g_n \in G_{P_0}$.

Concluímos que Γ contém um circuito se, e somente se, podemos encontrar uma seqüência de vértices de Γ, $P_0, \ldots, P_n$ com $\{P_{i-1}, P_i\} = \{P, Q\}$, para todo i e uma seqüência de elementos $g_i \in G_{P_i} - G_e$ $(0 \leq i \leq n)$ tal que $g_0g_1 \ldots g_n = 1$. Daí, temos que $G_P *_{G_e} G_Q \to G$ não é injetiva. ∎

Demonstração do Teorema 2.2.1: Como uma árvore é um grafo conexo não vazio sem circuitos, segue do Lema 2.2.2 que a aplicação $G_P *_{G_e} G_Q \to G$ é injetiva e, pelo Lema 2.2.1, que G é gerado por $G_P \cup G_Q$ e assim, tal aplicação é sobrejetiva. Logo, um isomorfismo. Por outro lado, basta considerarmos as recíprocas dos Lemas 2.2.1 e 2.2.2 para concluirmos que Γ é uma árvore. ∎

Reciprocamente, todo produto livre amalgamado de dois grupos age sobre uma árvore com um segmento como domínio fundamental. Mais precisamente, temos:

Teorema 2.2.2 *Seja $G = G_1 *_A G_2$ um produto livre amalgamado de dois grupos. Então existe uma árvore Γ (e somente uma, a menos de isomorfismo) sobre a qual G age, com um segmento T como domínio fundamental, vértices P e Q e aresta e tais que $G_P = G_1$, $G_Q = G_2$ e $G_e = A$ como seus respectivos estabilizadores.*

Demonstração: Seja $G = G_1 *_{G_A} G_2$ Definimos um grafo Γ sobre o qual G age, como segue

$$vert(\Gamma) = (G/G_1)\bigsqcup(G/G_2),\ aresta(\Gamma) = (G/A)\bigsqcup(G/A)^{-1}.$$

A aplicação definindo as extremidades de uma aresta é dada por

$$aresta(\Gamma) \to vert(\Gamma) \times vert(\Gamma)$$

$$gA \mapsto (gG_1, gG_2).$$

Com a ação óbvia de G sobre Γ o estabilizador do vértice $P = 1.G_1$ é o grupo G_1 e similarmente, para $Q = 1.G_2$ e $e = 1.G_A$ os estabilizadores são G_2 e A, respectivamente. O Teorema 2.2.1 então mostra que Γ é uma árvore. ■

Observação 2.2.1 *([19], p.34) (1) Os Teoremas 2.2.1 e 2.2.2 estabelecem uma equivalência entre "produto livre amalgamado de dois grupos" e "ação sobre uma árvore com um segmento como domínio fundamental".*

(2) Existe também uma equivalência análoga entre "HNN-grupos" e "ação sobre uma árvore com um laço como quociente". Uma das implicações pode ser encontrada em [18], que enunciaremos a seguir:

Teorema 2.2.3 *([18], Corolário 4.5) Seja G um grupo agindo sobre um grafo Γ. Se $G\backslash\Gamma$ consiste de um único laço então Γ contém uma aresta e com vértices adjacentes P e Q, onde $Q = gP$, para algum $g \in G$ e $G \simeq G_P *_{G_e}$.* ■

Exemplo 2.2.4 *Considere $\Gamma = \mathbb{R}$ e $G \simeq \mathbb{Z}$, como no Exemplo 2.2.2. O grafo quociente $G\backslash\Gamma$ é um laço e temos que $\mathbb{Z} \simeq \{1\}*_{\{1\}}$.*

Capítulo 3

(Co)Homologia de Grupos e Dualidade

Como veremos no próximo capítulo, a teoria de decomposição de grupos está fortemente relacionada com ends de grupos e pares de grupos. Esses, no entanto, têm uma grande interação com cohomologia de grupos. De fato, pode-se dar uma definição para tais ends usando uma linguagem cohomológica. Assim, neste capítulo, inicialmente definimos (co)homologia de grupos e apresentamos alguns resultados. Definimos também grupos de dualidade (D^n-grupos), que são grupos com *número de ends* igual a um, quando $n > 1$, e assim, não se decompõem sobre subgrupos *finitos* (Proposição 4.1.3).

3.1 RG-módulos e Resoluções de R sobre RG

Definição 3.1.1 *Sejam R um anel comutativo com unidade 1 e G um grupo denotado multiplicativamente, com elemento neutro 1. Seja RG (ou $R[G]$) o R-módulo livre gerado pelos elementos de G. Assim, um elemento de RG é expresso unicamente na forma $\sum_{g \in G} r_g.g$, com $r_g \in R$ e $r_g = 0$ para quase todo $g \in G$ (isto é, exceto para um número finito de elementos $g \in G$).*

Em RG, as operações de adição e multiplicação são dadas por:

$(\sum_{g\in G} r_g.g) + (\sum_{g\in G} s_g.g) = \sum_{g\in G}(r_g + s_g).g$

$(\sum_{g\in G} r_g.g).(\sum_{h\in G} s_h.h) = \sum_{g,h\in G} (r_g.s_h).(g.h).$

Tais operações fazem de RG um anel com unidade $1_{RG} = 1_R.1$, chamado anel grupo de G sobre R.

Em geral, o elemento $1_R.g \in RG$ será denotado por g.

Observação 3.1.1 *1. Se G é um grupo e $R = \mathbb{Z}_2$ então $x \in \mathbb{Z}_2G$ é da forma $x = 1.g_1 + \cdots + 1.g_k \equiv g_1 + \cdots + g_k$, com $1 \in \mathbb{Z}_2$ e $g_i \in G$.*

2. Para qualquer grupo G podemos definir o homomorfismo de anéis $\varepsilon : RG \to R$ tal que $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$ e estender por linearidade. Este homomorfismo é denominado aplicação aumentação. Note que ε é sobrejetora pois para todo $r \in R$, existe $x = r.g \in RG$ tal que $\varepsilon(x) = \varepsilon(rg) = r\varepsilon(g) = r$.

Proposição 3.1.1 *Seja G um grupo e M um conjunto não vazio. Então, M é um RG-módulo (à esquerda) se, e somente se, M é um R-módulo (à esquerda) munido de uma ação (à esquerda) de G sobre o grupo aditivo (M,+).*

Demonstração:

Se M é um RG-módulo então M é um R-módulo considerando $rm := (r1)m$ e pode-se definir uma G-ação por $g.m := (1_R.g)m$.

Reciprocamente, se M é um R-módulo e existe uma ação de G sobre M então podemos dar a M uma estrutura de RG-módulo da seguinte maneira $(\sum_{g\in G} r_g.g)m := \sum_{g\in G} r_g.(g.m)$. ■

Corolário 3.1.1 *M é um $\mathbb{Z}G$-módulo se, e somente se, M é um grupo abeliano munido de uma G-ação.*

Corolário 3.1.2 *M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo se, e somente se, M é um $\mathbb{Z}_2$-módulo (equivalentemente, grupo abeliano em que todo elemento tem ordem 2) munido de uma G-ação.*

Segue dos corolários anteriores que todo $\mathbb{Z}_2$G-módulo é um $\mathbb{Z}$G-módulo, mas a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 3.1.1 *Seja G um grupo. Então $\wp(G)$ é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, onde $\wp(G)$ é o conjunto das partes de G. A G-ação natural é dada por*

$$\begin{aligned} G \times \wp(G) &\to \wp(G) \\ (g, H) &\mapsto g.H = \{g.x; x \in H\} \end{aligned}$$

Observação 3.1.2 *Todo R-módulo M pode ser visto como um RG-módulo com a G-ação trivial. Em particular, $M = R$ será, em geral, considerado um RG-módulo trivial e assim, $(\sum_{g \in G} r_g.g)r := \sum_{g \in G} r_g(g.r) = \sum_{g \in G} r_g.r = \varepsilon(\sum_{g \in G} r_g.g)r$.*

Quando $R = \mathbb{Z}_2$ esta é a única estrutura de $\mathbb{Z}_2G$-módulo possível, pois $Aut(\mathbb{Z}_2) = \{id\}$.

Considerando X um G-conjunto e RX o R-módulo livre gerado pelos elementos de X, podemos estender a G-ação de G sobre X a uma G-ação sobre RX da seguinte maneira: $g.(\sum r_x x) := \sum r_x(g.x)$, com $g \in G$, $r_x \in R$ e $x \in X$. Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.2 *([6], Proposição 3.1) Sejam X um G-conjunto livre e E um conjunto de representantes para as G-órbitas em X. Então RX é um RG-módulo livre com base E.* ■

Corolário 3.1.3 *Se S é um subgrupo de G então RG é um RS-módulo livre com base num conjunto E de representantes para as S-órbitas em G (que são as classes laterais à esquerda de S em G), isto é, $RG = \bigoplus_{g \in E} (RS)_g$.*

Demonstração:

Temos que G é um S-conjunto com a ação dada pela multiplicação dos elementos de S por elementos de G (isto é, $s.g := sg$) e esta ação é livre (pois $s.g = g \Leftrightarrow s = 1$). Portanto, o resultado segue da proposição anterior. ■

Definição 3.1.2 *Sejam R um anel comutativo com unidade 1 e M um R-módulo. Uma resolução de M sobre R, ou uma R-resolução de M é uma sequência exata de R-módulos*

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

onde $\varepsilon : F_0 \to M$ é chamada aplicação aumentação.

Se cada F_i é R-módulo livre (respectivamente, projetivo), dizemos que a resolução é livre (respectivamente, projetiva).

Notação: $\varepsilon : F \to M$ denotará uma resolução de M sobre R.

Observação 3.1.3

1. *Toda resolução livre é projetiva, pois todo módulo livre é projetivo.*

2. *Se existir um inteiro n tal que $F_i = 0$, para $i > n$, dizemos que a resolução tem comprimento no máximo n. Neste caso, escrevemos simplesmente*

$$0 \to F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$$

Proposição 3.1.3 *([6], p.10) Dado um R-módulo M sempre podemos construir uma resolução livre (e portanto projetiva) de M sobre R.* ■

3.2 (Co)Invariantes

Nesta seção, consideraremos R um anel, G um grupo e M um RG-módulo (à esquerda).

Definição 3.2.1 *Sejam G um grupo e M um RG-módulo (à esquerda). O grupo de invariantes de M, denotado por M^G, é definido por:*

$$M^G = \{m \in M;\ g.m = m,\ \forall\ g \in G\}.$$

Observação 3.2.1

1. *Se a ação de G em M é trivial, isto é, $g.m = m$, para qualquer $m \in M$, então $M^G = M$.*

2. *É claro que a G-ação sobre M induz a G-ação trivial sobre M^G e assim, M^G é um RG-módulo trivial. Temos que M^G é o maior submódulo de M no qual G atua trivialmente.*

Proposição 3.2.1 $(Hom_R(M,N))^G = Hom_{RG}(M,N)$.

Demonstração:

Sejam $g \in G$ e $f \in Hom_R(M,N)$. Temos que

$g.f = f \Leftrightarrow (g.f)(m) = f(m),\ \forall\ m \in M \Leftrightarrow g.f(g^{-1}.m) = f(m)$, $\forall\ m \in M \Leftrightarrow g.f(m') = f(g.m'),\ \forall\ m' \in M\ (m' = g^{-1}.m)$.

Logo, $(Hom_R(M,N))^G = \{f \in Hom_R(M,N); g.f(m) = f(g.m)\} = Hom_{RG}(M,N)$.

Corolário 3.2.1 *Se R é visto como RG-módulo trivial (à esquerda) então $Hom_{RG}(R,M) \simeq M^G$ como grupos (e como RG-módulos triviais).*

Definição 3.2.2 *O grupo de coinvariantes de M, denotado por M_G, é dado por:*

$$M_G = \frac{M}{\langle g.m - m;\ g \in G \ e \ m \in M\rangle},$$

onde $\langle g.m - m;\ g \in G \ e \ m \in M\rangle$ é o submódulo de M gerado pelos elementos $g.m - m$, com $g \in G$ e $m \in M$.

Proposição 3.2.2 *([6], II.2.1.) Se R é visto como RG-módulo trivial (à esquerda), então*

$$M_G \simeq R \otimes_{RG} M.$$

■

3.3 Módulos (Co)Induzidos

Consideremos A, B anéis e $k : A \to B$ um homomorfismo de anéis.

1. Se M é um B-módulo (à esquerda) sempre podemos ver M como um A-módulo (à esquerda) definindo em M a A-multiplicação:

$$A \times M \to M$$
$$(a, m) \mapsto a.m := k(a).m$$

Neste caso, M é dito um A-módulo por *restrição de escalares* (via k) e será denotado por $Res_A^B M$.

Deste modo, se G é um grupo, H um subgrupo de G, $\alpha : RH \hookrightarrow RG$ aplicação inclusão de RH em RG e M é um RG-módulo, podemos ver M como um RH-módulo através de α e o RH-módulo M é denotado por $Res_H^G M$ (módulo restrição).

Seja M um RH-módulo e,

$$Ind_H^G M = RG \otimes_{RH} M.$$

$Ind_H^G M$ é um grupo abeliano. Em $Ind_H^G M$ definimos a seguinte ação:

$$G \times Ind_H^G M \to Ind_H^G M$$
$$(g, \alpha \otimes m) \mapsto g\alpha \otimes m$$

Com esta ação, $Ind_H^G M$ torna-se um RG-módulo.

2. Agora, se M é um A-módulo (à esquerda), podemos obter um B-módulo (à esquerda), $Hom_A(B, M)$, bastante relacionado com M, da seguinte maneira:

   Por restrição, podemos ver B como um A-módulo (à esquerda)

$$A \times B \to B$$
$$(a, b) \mapsto a.b := k(a).b \text{ (multiplicação do anel B)}$$

   e assim, faz sentido considerar $Hom_A(B, M)$.

   Pode-se mostrar que a aplicação

$$B \times Hom_A(B, M) \to Hom_A(B, M)$$
$$(b, f) \quad \mapsto \quad bf;\ (bf)(b') := f(b'b)$$

está bem definida e é uma B-multiplicação.

Assim, $Hom_A(B, M)$ é um B-módulo, denominado B-módulo obtido de M por *coextensão de escalares* de A para B (via k).

Agora, a cada RS-módulo M associamos o RG-módulo obtido de M por coextensão de escalares (que neste caso chamamos de coindução) e denotamos por $Coind_S^G M$, ou seja, $Coind_S^G M := Hom_{RS}(RG, M)$, onde a G-ação é dada por

$$\begin{aligned} G \times Coind_S^G M &\to Coind_S^G M \\ (g, f) &\mapsto (gf)(g') := f(g'g). \end{aligned}$$

Observação 3.3.1 *Se $H = \{1\}$, temos $RH \simeq R$. Deste modo,*

$$Ind_{\{1\}}^G M = RG \otimes_R M \text{ e } Coind_{\{1\}}^G M = Hom_R(RG, M)$$

Tais RG-módulos são chamados, respectivamente, ***módulo induzido*** *e* ***módulo coinduzido****.*

Observação 3.3.2 *Segue imediatamente de [6] (III.3.2) e (III.3.5), respectivamente, considerando $M = N$ e $f = id_M$, que as aplicações:*

$$\begin{aligned} i : M &\to Ind_H^G M = RG \otimes_{RH} M \\ m &\mapsto i(m) = 1 \otimes m \\ \pi : Coind_H^G M = Hom_{RH}(RG, M) &\to M \\ f &\mapsto \pi(f) = f(1) \end{aligned}$$

são, respectivamente, RH-monomorfismo e RH-epimorfismo.

Proposição 3.3.1 *([6], p. 67) O RG-módulo $Ind_H^G M$ contém M como um RH-submódulo. Além disso, considerando E um conjunto de representantes para as classes laterais (à esquerda) de H em G, e denotando por gm o conjunto obtido de M (visto como RH-submódulo de $Ind_H^G M$) sob a ação de G, temos*

$$Ind_H^G M = \bigoplus_{g \in E} gM.$$

■

Proposição 3.3.2 *De modo análogo, o caso dado pelo módulo de indução, se considerarmos o mergulho* $\rho : M \to Coind_H^G M$*, dado por*

$$\rho(m)(g) = \begin{cases} g.m, & se\ g \in H \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

temos que M *é um* RH*-módulo de* $Coind_H^G M$ *e, além disso,*

$$Coind_H^G M = \prod_{g \in E} gM.$$

■

Observação 3.3.3 *A aplicação* ρ *se estende a um* RG*-homomorfismo* $\varphi : RG \otimes_{RH} M \to Hom_{RH}(RG, M)$ *([6], III.3.2). Tal aplicação pode ser identificada com a inclusão canônica da soma direta no produto direto ([6], p. 70) e, assim, podemos ver* $Ind_H^G M$ *como um* RG*-submódulo de* $Coind_H^G M$*.*

Proposição 3.3.3 *Se* $[G : H] < \infty$*, então* $Ind_H^G M \simeq Coind_H^G M$*.*

Demonstração: Se $[G : H] < \infty$, temos que a soma direta e o produto direto coincidem e, portanto, segue o resultado. ■

Definição 3.3.1 *Sejam* M *e* N RG*-módulos (*$R = \mathbb{Z}$ *ou* $R = \mathbb{Z}_2$*). Considerando* M *e* N *como* R*-módulos podemos definir sobre* $Hom_R(M, N)$ *uma* G*-ação (denominada ação diagonal) de modo a torná-lo um* RG*-módulo. Essa ação, a qual é induzida da ação de* G *sobre* M *e* N*, é definida da seguinte forma:*

$$\begin{array}{ccl} G \times Hom_R(M, N) & \to & Hom_R(M, N) \\ (g, f) & \mapsto & g.f;\ \ (g.f)(m) = g.f(g^{-1}.m),\ \forall\ m \in M \end{array}$$

Proposição 3.3.4 *([6], Proposição 5.6) Seja* M *um* RG*-módulo. Então existe um* RG*-isomorfismo natural* $Coind_S^G Res_S^G M \simeq Hom_R(R(G/S), M)$ *onde* G *atua diagonalmente no* Hom_R*.* ■

3.4 Definições e Exemplos de $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$

Seja

$$F : \cdots \to F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \to 0$$

uma resolução projetiva de R sobre RG e M um RG-módulo (à esquerda).

Podemos formar complexos de cadeia e cocadeia, respectivamente $F \otimes_{RG} M$ e $Hom_{RG}(F, M)$:

$$F \otimes_{RG} M : \cdots \to F_n \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{\partial_n}} \cdots \to F_1 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{\partial_1}} F_0 \otimes_{RG} M \to 0$$

$$Hom_{RG}(F, M) : 0 \to Hom_{RG}(F_0, M) \xrightarrow{\delta^0} \cdots \to Hom_{RG}(F_n, M) \to \cdots$$

O operador bordo é dado por $\overline{\partial_n} := \partial_n \otimes id$, $n \geq 1$ e $\overline{\partial_0} = 0$ e, o operador cobordo, por

$$\begin{aligned} \delta^n : Hom_{RG}(F_n, M) &\to Hom_{RG}(F_{n+1}, M) \\ f &\mapsto \delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1},\ n > 0 \text{ e } \partial_0 = 0 \end{aligned}$$

Definição 3.4.1 *O n-ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em M é definido por*

$$H_n(G, M) := H_n(F \otimes_{RG} M).$$

O n-ésimo grupo de cohomologia de G com coeficientes em M é definido por

$$H^n(G, M) := H^n(Hom_{RG}(F, M)).$$

Observação 3.4.1 *As definições de $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ independem da resolução projetiva $\varepsilon : F \to R$ (a menos de isomorfismo canônico) ([6], I.7.5).*

Proposição 3.4.1 *Dado um RG-módulo M, temos os isomorfismos:*

(a) $H_0(G, M) \simeq M_G$;

(b) $H^0(G, M) \simeq M^G$.

Exemplo 3.4.1 *1. Sejam $G = \{1\}$ e M um RG-módulo.*

Então, $H^i(\{1\}, M) \simeq \begin{cases} M^{\{1\}} \simeq M, & se\ i = 0 \\ 0, & se\ i > 0 \end{cases}$

2. Sejam $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$, grupo cíclico infinito e M um RG-módulo.

Então, $H^i(G, M) \simeq \begin{cases} M^G, & se\ i = 0 \\ M_G, & se\ i = 1 \\ 0, & se\ i \geq 2 \end{cases}$

(i) Se M é um RG-módulo trivial então $H^0(G, M) = M = H^1(G, M)$ e $H^i(G, M) = 0$, para $i \geq 2$.

(ii) Seja $M = \mathbb{Z}G$ visto como $\mathbb{Z}G$-módulo com a G-ação natural: $t^k.(rt^{k'}) := rt^{k+k'}$, para todos $t^k,\ t^{k'} \in G$ e $r \in \mathbb{Z}$.

Então, $H^i(G, \mathbb{Z}G) \simeq \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \mathbb{Z}, & i = 1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases}.$

(iii) Seja $M = \mathbb{Z}_2G$ visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo com a G-ação: $t^k.(1.t^{k'}) := 1.t^{k+k'}$, $1 \in \mathbb{Z}_2$ e para todos $t^k,\ t^{k'} \in G$.

Então, $H^i(G, \mathbb{Z}_2G) \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}_2G)^G \simeq 0, & i = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & i = 1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases}.$

3. Para $G \simeq \mathbb{Z}_n$ e $M = \mathbb{Z}$, com a G-ação trivial, obtemos

$$H^i(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & se\ i = 0 \\ 0, & se\ i\ é\ ímpar \\ \dfrac{\mathbb{Z}}{n.\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_n, & se\ i\ é\ par, i \geq 2 \end{cases}$$

4. Se $G = \{1, t\} \simeq \mathbb{Z}_2$ e $M = \mathbb{Z}$ é visto como um $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_2)$-módulo com a G-ação $1.r := r$ e $t.r = -r$, para todo $r \in \mathbb{Z}$, temos que

$$H^i(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_2} = \{0\}, & \textit{se } i = 0 \\ \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2, & \textit{se } i \textit{ é ímpar} \\ 0, & \textit{se } i \textit{ é par} \end{cases}$$

5. $H^i(\mathbb{Z},\mathbb{Z}G) \simeq \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \mathbb{Z}, & i = 1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases}$, *com a* $\mathbb{Z}$*-ação natural:* $k+(n+k') = n+(k+k')$.

6. $H_i(\mathbb{Z},\mathbb{Z}G) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ 0, & i = 1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases}$, *com a* $\mathbb{Z}$*-ação natural.*

3.5 O Lema de Shapiro

Na seção 2.4, vimos que se H é um subgrupo de um grupo G e M é um RH-módulo, $Ind_H^G M$ e $Coind_H^G M$ são RG-módulos. Considerando tais RG-módulos, temos o seguinte resultado que relaciona a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de seu subgrupo H.

Proposição 3.5.1 ***(Lema de Shapiro)*** *([6], Proposição 6.2, p. 73) Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}H$-módulo. Então temos os isomorfismos:*

(a) $H_*(H,M) \simeq H_*(G, Ind_H^G M)$;

(b) $H^*(H,M) \simeq H^*(G, Coind_H^G M)$. ■

Observação 3.5.1 *Dado um grupo G, podemos verificar que $\wp(G) = \{A : A \subset G\}$ é um $\mathbb{Z}_2$-espaço vetorial com $A + B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ (diferença simétrica) e $\overline{0}.A = \emptyset$, $\overline{1}.A = A$, para todo $A, B \subset G$. Mais ainda, é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Além disso, $F(G) = \{A \in \wp(G); A \text{ é finito}\}$ é um $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $\wp(G)$, com a G-ação natural (à esquerda) $(g, A) \mapsto g.A = \{g.a; a \in A\}$. Vejamos a relação entre os $\mathbb{Z}_2G$-módulos $Coind_{\{1\}}^G\mathbb{Z}_2$, $\wp(G)$, $\mathbb{Z}_2G$ e $F(G)$.*

Proposição 3.5.2 *([7], Corolário 2.4.3.5, p. 59) Sejam G um grupo e $\wp(G)$ o conjunto das partes de G. Então $\overline{\mathbb{Z}_2 G} := Coind_{\{1\}}^{G}\mathbb{Z}_2 \simeq \wp(G)$ como $\mathbb{Z}_2G$-módulos. Além disso, o $\mathbb{Z}_2G$-submódulo $\mathbb{Z}_2G$ de $\overline{\mathbb{Z}_2G}$ é levado por este isomorfismo no $\mathbb{Z}_2G$-submódulo $F(G)$ de $\wp(G)$.* ■

3.6 Grupos de Dualidade

Como já dissemos anteriormente, vamos definir a seguir grupos de dualidade (D^n-grupos), que são grupos com número de ends igual a um, quando $n > 1$, e portanto, não se decompõem sobre subgrupos *finitos* (Proposição 4.1.3). Como referência, sugerimos [5].

Definição 3.6.1 *Um grupo G é denominado grupo de dualidade de dimensão n sobre R, ou simplesmente, um D^n-grupo sobre R ($R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$) se existe um RG-módulo (à direita) C, chamado módulo dualizante de G, tal que tenhamos isomorfismos naturais*

$$H^k(G, M) \simeq H_{n-k}(G, C \otimes_R M),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo RG-módulo M, onde $C \otimes_R M$ é visto como RG-módulo com a G-ação diagonal.

Se $C \simeq R$ como RG-módulo dizemos que G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre R, ou simplesmente, um PD^n-grupo sobre R. Neste caso, se a ação de G em C é trivial dizemos que G é orientável, caso contrário, G é dito não orientável.

Observação 3.6.1 *Nas seções seguintes consideraremos sempre $R = \mathbb{Z}_2$, a menos que se especifique ao contrário. Assim, por conveniência, se G é um D^n-grupo sobre $\mathbb{Z}_2$ (PD^n-grupo sobre $\mathbb{Z}_2$) diremos, simplesmente, que G é um D^n-grupo (PD^n-grupo), sem falar no anel $\mathbb{Z}_2$. Observemos que considerando $R = \mathbb{Z}_2$ tem-se que todo PD^n-grupo é orientável.*

Pode-se verificar o seguinte fato:

Lema 3.6.1 *Se G é um D^n-grupo sobre $\mathbb{Z}$ com módulo dualizante C então G é um D^n-grupo (sobre $\mathbb{Z}_2$) com módulo dualizante $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$. Em particular, se G é um PD^n-grupo sobre $\mathbb{Z}$ então G é um PD^n-grupo.* ■

Exemplo 3.6.1

1. *O grupo trivial $\{1\}$ é o único D^0-grupo sobre $\mathbb{Z}$ e, conseqüentemente, sobre $\mathbb{Z}_2$*
2. *$\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ e, mais geralmente, todos os grupos finitos de ordem ímpar, são D^0-grupos (sobre $\mathbb{Z}_2$).*
3. *$\mathbb{Z}$ é um PD^1-grupo sobre $\mathbb{Z}$.*

Encerraremos esta seção com um resultado que será utilizado no próximo capítulo.

Proposição 3.6.1 *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Se G é um PD^n-grupo e $[G : H] < \infty$ então H é um PD^n-grupo.*

Demonstração: Como G é um PD^n-grupo, temos

$$H^k(G, A) \simeq H_{n-k}(G, A) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ e todo } RG - \text{módulo } A.$$

Assim, usando o Lema de Shapiro e a dualidade, temos

$$H^k(H, M) \simeq H^k(G, Coind_H^G M) \simeq H_{n-k}(G, Coind_H^G M)$$

Agora, como $[G : H] < \infty$, temos que

$$H_{n-k}(G, Coind_H^G M) = H_{n-k}(G, Ind_H^G M)$$

Novamente, pelo Lema de Shapiro, temos

$$H_{n-k}(G, Ind_H^G M) \simeq H_{n-k}(H, M).$$

Portanto, H é um PD^n-grupo. ■

Capítulo 4

Invariantes Ends e Decomposição de Grupos

Um dos primeiros resultados em decomposição de grupos, conforme já citamos anteriormente, é o resultado de Stallings: "Se G é finitamente gerado então G se decompõe sobre um subgrupo finito se, e somente se, $e(G) \geq 2$", onde $e(G)$ indica o número de ends de um grupo G. Um resultado para decomposição de grupos sobre um subgrupo não necessariamente finito é dado por Scott. Inicialmente, veremos a definição de tais ends e alguns resultados, com destaque para o teorema de Stallings. Na prova de tais resultados poderemos observar o uso da relação entre produto livre com subgrupo amalgamado ou extensão HNN e a teoria de grafos tratada anteriormente. Também, apresentamos a prova de um resultado de Kropholler e Roller (Teorema 4.3.2) sobre decomposição de grupos que envolve a obstrução sing definida pelos autores (e indiretamente, o invariante end $\tilde{e}(G,S)$). A referência básica para $e(G)$ é [18] ou [9]; para $e(G,S)$ sugerimos [17], para o resultado referido e a obstrução *sing* vide [12]. Já o invariante $\tilde{e}(G,S)$ é tratado em [13].

4.1 Decomposição de Grupos e o End Clássico

Definição 4.1.1 *Dizemos que um grupo G se decompõe sobre um subgrupo C, se G é um produto livre com subgrupo amalgamado C, isto é, $G = A *_C B$ com $A \neq C \neq B$*

ou G é uma extensão HNN, $G = A*_C$.

A definição clássica de números de ends para grupos finitamente gerados foi introduzida por Hopf e Freudental e foi totalmente amparada na definição de ends de espaços. A definição algébrica de números de ends de um grupo G qualquer foi dada por Specker.

Dado um grupo G, conforme vimos na Observação 3.5.1, temos que $\wp(G) = \{A : A \subset G\}$ é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo (com a operação "+"sendo a diferença simétrica) e $F(G) = \{A \in \wp(G); A \text{ é finito}\}$ é um $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $\wp(G)$. Considere o $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $\wp(G)$, $Q(G) = \{A \in \wp(G); \forall\, g \in G, A + gA \in F(G)\}$ e os $\mathbb{Z}_2G$-módulos quocientes $\dfrac{Q(G)}{F(G)}$ e $\dfrac{\wp(G)}{F(G)}$.

Nos referimos a dois conjuntos A e B cuja diferença simétrica pertence a $F(G)$ como *quase iguais*, e denotamos por $A \overset{a}{=} B$, ou seja, temos a igualdade desses conjuntos no grupo quociente $\dfrac{\wp(G)}{F(G)}$. Assim, $A \in Q(G)$ se, e somente se, $A \overset{a}{=} gA$, para todo $g \in G$. Os elementos de $Q(G)$ são chamados de conjuntos *quase invariantes*.

Vamos denotar um elemento $A + F(G)$ de $\dfrac{\wp(G)}{F(G)}$ ou $\dfrac{Q(G)}{F(G)}$ por $\overline{A}$.

Definição 4.1.2 *Dado um grupo G,* o número de ends *de G, denotado por $e(G)$, é definido por $e(G) := dim_{\mathbb{Z}_2}(\dfrac{Q(G)}{F(G)})$.*

Observação 4.1.1 *(a) Poderíamos ter considerado $\wp(G)$ como um $\mathbb{Z}_2G$-módulo* à direita*, o subconjunto de $\wp(G)$ dos elementos quase invariantes* à direita*, $Q(G) = \{A \in \wp(G) \mid \forall\, g \in G, A + Ag \in F(G)\}$, e de modo similar, definir*

$$e(G) := dim_{\mathbb{Z}_2}(\frac{Q(G)}{F(G)}).$$

(b) Temos que essas duas definições apresentadas para $e(G)$ coincidem (pois, A é quase invariante à esquerda $\Leftrightarrow A + gA \in F(G), \forall\, g \in G \Leftrightarrow A^{-1} + A^{-1}g^{-1} \in F(G), \forall\, g \in G \Leftrightarrow A^{-1}$ *é invariante* à direita, *onde $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$), e todos os resultados existentes se usarmos a G-ação à esquerda são válidos também quando*

trabalhamos com a G-ação à direita.

Em geral, trabalharemos com a ação à esquerda, a menos que se especifique o contrário.

Apresentaremos a seguir alguns resultados úteis da teoria de ends; as demonstrações serão omitidas. Para maiores detalhes, ver [18].

Considere a G-ação natural em $\wp(G)$ e $\dfrac{Q(G)}{F(G)}$ (de modo a tornar tais espaços $\mathbb{Z}_2G$-módulos). Podemos verificar que $(\dfrac{\wp(G)}{F(G)})^G = \dfrac{Q(G)}{F(G)}$ e assim a seguinte interpretação para $e(G)$ em termos de grupos de cohomologia pode ser dada:

Proposição 4.1.1 $e(G) = dim_{\mathbb{Z}_2} H^0\left(G, \dfrac{\wp(G)}{F(G)}\right)$. ■

Proposição 4.1.2 *Dado um grupo G temos um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo entre $\dfrac{\wp(G)}{F(G)}$ e $\dfrac{\overline{\mathbb{Z}_2G}}{\mathbb{Z}_2G}$ onde $\overline{\mathbb{Z}_2G} := Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) \overset{not}{=} Coind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$ e conseqüentemente, $e(G) = dim_{\mathbb{Z}_2} H^0\left(G, \dfrac{\overline{\mathbb{Z}_2G}}{\mathbb{Z}_2G}\right)$.* ■

Lema 4.1.1 *Temos que $e(G) \geq 2$ se, e somente se, existe um subconjunto quase invariante (à direita ou à esquerda) K de G tal que K e $K^* = G - K$ sejam infinitos, ou seja, existe $\overline{K} \in \dfrac{Q(G)}{F(G)}$ tal que $\overline{K} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{K} \neq \overline{G}$. Neste caso, $\overline{\emptyset}, \overline{K}, \overline{K^*}$ e $\overline{G}$ são elementos distintos em $\dfrac{Q(G)}{F(G)}$.* ■

Exemplo 4.1.1 *Se G é o grupo cíclico infinito gerado por a então $e(G) = 2$, pois pode-se verificar que $K = \{a^n; n > 0\} \subset G$ é tal que $K \in Q(G)$, $\overline{K} \neq \overline{\emptyset}$, $\overline{K} \neq \overline{K^*}$, $\overline{K} \neq \overline{G}$ e $\dfrac{Q(G)}{F(G)} = \{\overline{\emptyset}, \overline{G}, \overline{K}, \overline{K^*}\}$.*

Teorema 4.1.1 *([18], p. 175-176)*

(1) Se G_1 e G_2 são grupos isomorfos, então $e(G_1) = e(G_2)$.

(2) Se G é um grupo infinito, então $e(G) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G, \mathbb{Z}_2G)$.

(3) Se H é um subgrupo de um grupo G com $(G : H) < \infty$, então $e(G) = e(H)$;

(4) Se G possui um subgrupo normal K então $e(G) = e(G/K)$.

(5) Se G é um grupo não enumerável e abeliano, então $e(G) = 1$.

(6) Se G é finitamente gerado, $A \in Q(G)$ é tal que A e $G - A$ são infinitos, e $H = \{h \in G;\, hA = A\}$ é infinito então G tem um subgrupo cíclico infinito de índice finito.

(7) Se G é um grupo finitamente gerado, então $e(G) = 0, 1, 2$ ou ∞.

(8) Sejam A_0, $A_1 \in Q(G)$. Para quase todos $g \in A_0$, isto é, todos exceto um número finito de elementos $g \in A_0$, tem-se que $gA_1 \subseteq A_0$ ou $g(G - A_1) \subseteq A_0$.

O próximo resultado nos diz que quando G é um grupo de dualidade, o número de ends de G, $e(G)$, é um.

Proposição 4.1.3 *Se G é um D^n-grupo sobre $\mathbb{Z}_2$ para algum $n > 1$ então $e(G) = 1$.*

Demonstração: Como G é infinito, temos $e(G) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G, \mathbb{Z}_2 G)$. Calculemos $dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G, \mathbb{Z}_2 G)$. Seja C o módulo dualizante de G. Temos que $H^1(G, \mathbb{Z}_2 G) \simeq H_{n-1}(G, C \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2 G)$ pois G é um D^n-grupo sobre $\mathbb{Z}_2$. Daí, $H_{n-1}(G, C \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2 G) \simeq H_{n-1}(G, Ind_{\{1\}}^G C) \simeq H_{n-1}(\{1\}, C)$ pelo Lema de Shapiro (Proposição 3.5.1). Assim, como $n > 1$, temos que $H_{n-1}(\{1\}, C) = 0$ (Exemplo 3.4.1, item 1). Logo, $dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G, \mathbb{Z}_2 G) = 0$ o que implica em $e(G) = 1$. ■

Corolário 4.1.1 *(i) Se G é um D^n-grupo sobre $\mathbb{Z}$, $n > 1$, então $e(G) = 1$.*

(ii) Se $e(G) \neq 1$ então G não é um D^n-grupo sobre $\mathbb{Z}$ ou sobre $\mathbb{Z}_2$, para $n > 1$. ■

Observação 4.1.2 *A recíproca da proposição não é verdadeira, pois o grupo aditivo $G = \mathbb{R}$ tem $e(G) = 1$, mas G não é um D^n-grupo, uma vez que G não é finitamente gerado (ver [5], Teorema 9.2 e Proposição 2.1).*

Existe uma classificação completa para grupos com dois ends devida a Hopf (1943), que é um resultado sobre decomposição de grupos e a prova será omitida.

Teorema 4.1.2 *([18], Teorema 5.12) As seguintes condições são equivalentes para grupos finitamente gerados:*

(i) $e(G) = 2$.

(ii) G *tem um subgrupo cíclico infinito de índice finito.*

(iii) G *tem um subgrupo normal* K *tal que* G/K *é isomorfo a* $\mathbb{Z}$ *ou ao grupo diedral infinito* $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

(iv) $G = F*_F$ *com* F *finito, ou* $G = A *_F B$ *com* F *finito e* $(A : F) = (B : F) = 2$.

■

O teorema seguinte dá uma caracterização para grupos finitamente gerados que se decompõem sobre subgrupos finitos e que inclui o caso de dois ends, a saber:

Teorema 4.1.3 *([18] Lema 6.3) Se* G *se decompõe sobre um subgrupo finito então* $e(G) \geq 2$.

Demonstração: A essência da prova é usar os teoremas da forma normal para produtos livres amalgamados e extensões HNN para se produzir um subconjunto E de G, quase invariante (à direita), tal que E e $E^* = G - E$ são infinitos, como no Lema 4.1.1. Para isto, usaremos aqui a ação à direita, isto é, $E \stackrel{a}{=} Ea$.

Suponhamos primeiro que $G = A *_C B$, onde C é finito. Recorde a forma normal dos elementos de G dada no Teorema 1.4.2. Escolha transversais T_A e T_B para C em A e B, respectivamente. Então qualquer elemento de G tem a forma $a_1 b_1 \ldots a_n b_n c$, onde $c \in C$, $a_i \in T_A$, $b_i \in T_B$ e $a_i = 1 \Rightarrow i = 1$, $b_i = 1 \Rightarrow i = n$.

Seja E o subconjunto de G consistindo dos elementos para os quais a_1 é não trivial. Claramente, E e E^* são infinitos (isto se deve ao fato de que $A \neq C \neq B$ e assim T_A e T_B possuem pelo menos um elemento não trivial a_1 e b_1, respectivamente, com os quais podemos formar infinitas palavras já que $a_i \in T_A$ (e $b_i \in T_B$) não precisam ser distintos). Se $b \in B$ então $Eb = E$, visto que $u = a_1 b_1 \ldots a_n b_n c \in E$, então $ub = a_1 b_1 \ldots a_n b_n cb \in E$, pois pode ocorrer que $cb = c_0 \in C$ ou então tome $cb = a_{n+1} c$. Se $a \in A$, então $Ea \subset E \cup C$ (pois, neste caso, poderíamos ter $u = a_1 \in E$ tal que $ua = a_1 a$ com $a_1 a \in C$) e então também $Ea^{-1} \subset E \cup C$ (uma vez que vale para qualquer a). Portanto,

$E \subset Ea \cup Ca \subset E \cup C \cup Ca$ e então $E - Ea$ e $Ea - E$ são finitos (pois $E - Ea \subset Ca$, $Ea - E \subset C \cup Ca$ e C é finito). Assim, $E + Ea = (E - Ea) \cup (Ea - E) \in F(G)$, ou seja, $E \overset{a}{=} Ea$. Como A e B juntos geram G, temos $Eg \overset{a}{=} E$ para todo $g \in G$. Logo, neste caso, obtemos E nas condições do Lema 4.1.1 anteriormente citado e então $e(G) \geq 2$.

Agora, suponha que $G = A*_C$, onde C é finito e usaremos a forma normal para elementos de G, dada pelo Teorema 1.5.1.

Escolha transversais T_i de $\alpha_i(C)$ em A e obtenha a forma $a_1 t^{\varepsilon_1} a_2 t^{\varepsilon_2} \dots a_n t^{\varepsilon_n} a_{n+1}$, onde $a_{n+1} \in A$, $a_i \in T_1$ se $\varepsilon_i = 1$, $a_i \in T_2$ se $\varepsilon_i = -1$ e além disso, $a_i \neq 1$ se $\varepsilon_{i-1} \neq \varepsilon_i$.

Seja E o subconjunto dos elementos de G para os quais a_1 é trivial e $\varepsilon_1 = 1$. Se $a \in A$, então $Ea = E$. Também, $Et \subset E$ e $Et^{-1} \subset E \cup \alpha_1(C)$. Portanto, como antes, E é um subconjunto quase invariante em G como desejado e assim, pelo Lema 4.1.1, $e(G) \geq 2$. ■

Estaremos interessados agora em responder a questão na direção contrária, isto é, $e(G) \geq 2$ implica que G se decompõe sobre um subgrupo finito. Para tanto, faz-se necessário o resultado seguinte (cuja prova será omitida):

Lema 4.1.2 *([18], Lema 6.4 e Teorema 6.5) Seja E um conjunto parcialmente ordenado com uma aplicação (involução) $\varphi : E \to E$; $e \mapsto e^{-1}$, onde $e \neq e^{-1}$, e suponha que sejam válidas as seguintes condições:*

(1) Se $e \leq f$ então $f^{-1} \leq e^{-1}$.

(2) Se $e, f \in E$ existe somente um número finito de elementos $g \in E$ tal que $e \leq g \leq f$.

(3) Se $e, f \in E$, pelo menos uma das condições $e \leq f$, $e \leq f^{-1}$, $e^{-1} \leq f$, $e^{-1} \leq f^{-1}$ valem.

(4) Se $e, f \in E$ não podemos ter $e \leq f$ e $e \leq f^{-1}$.

Vamos denotar $e < f$ se $e \leq f$ e $e \neq f$ e $e << f$ se $e < f$ e $e \leq g \leq f$ implica $g = e$ ou $g = f$ e defina a relação $\sim$ sobre E por:

$$e \sim f \text{ se, e somente se, } e = f \text{ ou } e << f^{-1}.$$

Então:

(I) A relação $\sim$ é uma relação de equivalência.

(II) Tomando $V = \{[e] : e \in E\}$ o conjunto das classes de equivalência de $e \in E$, e considerando a aplicação de E em $V \times V$ que associa $e \mapsto ([o(e)], [t(e)])$ e a aplicação $\varphi : E \to E$; $e \mapsto e^{-1}$, temos que associado a E, podemos construir um grafo Γ.

(III) O grafo Γ é uma árvore e a relação de ordem que Γ induz sobre E de acordo com a Definição 2.1.3 é a mesma relação original de E. ■

Vejamos agora o resultado conhecido como *Teorema de Estrutura de Stallings* ([18], Teorema 6.1, p.182):

Teorema 4.1.4 *Se G é um grupo finitamente gerado com $e(G) \geq 2$ então G se decompõe sobre um subgrupo finito.*

Demonstração: Notemos que pelo Teorema 4.1.1, item (7), $e(G) \geq 2$ implica que $e(G) = 2$ ou $e(G) = \infty$. Para $e(G) = 2$ já sabemos que isso é verdade (Teorema 4.1.2). Resta-nos analisar o caso em que $e(G) = \infty$.

A idéia é *construir uma árvore* Γ sobre a qual G age, em que o estabilizador de qualquer aresta seja finito e o quociente $G \backslash \Gamma$ seja uma única aresta (um segmento ou um laço), para então concluirmos, admitindo alguns passos, que G se decompõe sobre um subgrupo finito, usando o Teorema 2.2.1 ou o Teorema 2.2.3.

Tal árvore será construída *a partir de um conjunto E* parcialmente ordenado que satisfaça as condições do Lema 4.1.2. Para isto, precisamos ordenar parcialmente os subconjuntos quase invariantes por *quase inclusões* e não apenas por inclusões estritas de modo que seja possível provar que a condição (3) do Lema 4.1.2 é válida (isto é, consideramos a quase inclusão $B \overset{a}{\subset} C$, o que significa que $B \subset C$ exceto para um número finito de elementos).

Para qualquer subconjunto B em $Q(G)$, ou seja, B subconjunto quase invariante de G, denote por $[B]$ o conjunto de todos os conjuntos quase invariantes de G que são quase iguais a B, isto é,

$$[B] = \{C \in Q(G); B \overset{a}{\subset} C\}$$

pode-se ver que se $B \overset{a}{=} B_1$ e $C \overset{a}{=} C_1$ então $B \overset{a}{\subset} C \Leftrightarrow B_1 \overset{a}{\subset} C_1$. Defina então a relação

$$[B] \leq [C] \text{ se, e somente se, } B \overset{a}{\subset} C \quad (*) \qquad .$$

Fixemos um subconjunto próprio A quase invariante de G, isto é, com A e $G - A$ infinitos (que existe pois estamos supondo que $e(G) \geq 2$), e seja

$$E := \{[gA],\ [gA^*], \text{ para todo g } \in G\},$$

parcialmente ordenado por $\leq$ como em $(*)$.

Temos claramente uma aplicação (involução) sobre E; $[A] \to [A^*]$ (ou melhor, $[gA] \to [gA^*]$ e $[gA^*] \to [gA]$). Precisamos *encontrar um subconjunto quase invariante* A tal que o conjunto parcialmente ordenado E, com a relação acima definida satisfaça as condições (1) a (4) do Lema 4.1.2, de modo a obter a árvore Γ desejada, pois, uma vez obtida tal árvore, tem-se que o estabilizador da aresta $[A]$ será finito, pois $G_{[A]} = \{g \in G; g[A] = [A]\} = \{g \in G; [gA] = [A]\} = \{g \in G : gA \overset{a}{=} A\}$ é finito (pelo Teorema 4.1.1 (item 6), Teorema 4.1.2 e o fato que estamos supondo $e(G) = \infty$).

Pode-se verificar também que o grupo G age sem inversões ([18], p.186).

Assim, para completar a demonstração do Teorema 4.1.4, devemos mostrar *como encontrar um conjunto próprio quase invariante* A de G tal que o conjunto parcialmente ordenado E satisfaz as condições de (1) a (4). Agora:

• Pode-se verificar que as condições (1) e (4) valem para qualquer escolha de A (subconjunto próprio quase invariante de G).

• Pode-se mostrar também que condição (2) vale para todo A ([18], Lema 6.6).

• Devemos então indicar como é possível escolher A de modo que E satisfaça a condição (3), que é equivalente a satisfazer a seguinte condição:

Dados $[g_1A]$, $[g_2A] \in E$, ao menos uma das propriedades $g_1A \overset{a}{\subset} g_2A$, $g_1A \overset{a}{\subset} g_2A^*$, $g_1A^* \overset{a}{\subset} g_2A$, $g_1A^* \overset{a}{\subset} g_2A^*$ ocorre. Ou ainda, para todo $g \in G$, ao menos uma das condições $A \overset{a}{\subset} gA$, $A \overset{a}{\subset} gA^*$, $A^* \overset{a}{\subset} gA$, $A^* \overset{a}{\subset} gA^*$ ocorre.

Notemos que para *quase* todo $g \in G$ uma das inclusões $gA \subset A$, $gA \subset A^*$, $gA^* \subset A$, $gA^* \subset A^*$ é verdadeira ([18], Corolário 5.11). Devemos obter A de modo que isto ocorra para *todo* elemento de G, quando substituímos as inclusões estritas por quase inclusões.

Fixamos um conjunto gerador finito S para G e seja $\Upsilon = \Upsilon(G, S)$ o grafo (de Cayley) correspondente. Se A é um subconjunto quase invariante qualquer em G então A é um conjunto de vértices de $\Upsilon(G, S)$. Considere ([9], p. 25) o *cobordo* do conjunto A, $\delta A = \{e;\ e$ aresta de $\Upsilon(G, S)$ tal que e tem exatamente um vértice em $A\}$. Como G é finitamente gerado, pode-se verificar que dado $A \subset G$, δA é finito se, e somente se, A é quase invariante ([9], p.26). Denotamos o número de arestas em δA por $\mid \delta A \mid$. Notemos que $\mid \delta A \mid \geq 1$ pois $\Upsilon(G, S)$ é conexo. Seja k o menor valor assumido por $\mid \delta A \mid$ quando A percorre os conjuntos quase invariantes de G. Dizemos que um conjunto A em G é *reduzido* ("narrow") se $\mid \delta A \mid = k$. Seja g_0 qualquer elemento de G e seja A um conjunto reduzido em G. Então A^* é também reduzido (pois $\delta A^* = \delta A$) e daí, g_0 pertence a um conjunto reduzido em G (pois $g_0 \in A$ ou $g_0 \in A^*$). Agora, pode-se mostrar que o conjunto de todos os subconjuntos reduzidos de G que contêm g_0 tem elementos minimais, onde ordenamos parcialmente os conjuntos reduzidos pela inclusão ([18], Lema 6.7).

Pode-se mostrar ainda que se A é reduzido e minimal com respeito a conter algum elemento g_0 de G então para qualquer conjunto reduzido A_1, uma das inclusões $A \overset{a}{\subset} A_1$, $A \overset{a}{\subset} {A_1}^*$, $A^* \overset{a}{\subset} A_1$, $A^* \overset{a}{\subset} {A_1}^*$ ocorre ([18], Lema 6.8).

Para completar a prova do Teorema, como enfatizado no início precisamos simplesmente escolher um conjunto reduzido A em G que é minimal com respeito a conter algum elemento de G, pois para todo $g \in G$, $A_1 = gA$ também é reduzido e portanto, uma das inclusões $A \overset{a}{\subset} gA$, $A \overset{a}{\subset} gA^*$, $A^* \overset{a}{\subset} gA$, $A^* \overset{a}{\subset} gA^*$ ocorre. ■

Baseados nos Teoremas 4.1.3 e 4.1.4 podemos então enunciar o resultado seguinte:

Teorema 4.1.5 *Se G é um grupo finitamente gerado, então $e(G) \geq 2$ se, e somente se, G se decompõe sobre um subgrupo finito.* ■

4.2 Decomposição de Grupos e o end $e(G, S)$

O conceito de número de ends $e(G, S)$ de um par grupo (G, S), onde S é um subgrupo de G, é um generalização do número de ends de um grupo.

A definição natural de $e(G, S)$ é devida a Houghton e foi estabelecida para grupos topológicos. Scott em [17] (1977), explorou este invariante para grupos discretos.

Podemos considerar $\mathbb{Z}_2(G/S)$ como um $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$, e o $\mathbb{Z}_2G$-módulo quociente $\dfrac{\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}}{\mathbb{Z}_2(G/S)} \simeq \dfrac{\wp(G/S)}{F(G/S)}$.

Definição 4.2.1 *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G. Então, por definição*

$$e(G, S) = dim_{\mathbb{Z}_2} H^0(G, \frac{\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}}{\mathbb{Z}_2(G/S)}) = dim_{\mathbb{Z}_2} (\frac{\wp(G/S)}{F(G/S)})^G.$$

No lema seguinte, agrupamos algumas propriedades de $e(G, S)$. Elas estão contidas em [17].

Lema 4.2.1 *(i) $e(G, \{1\}) = e(G)$.*

(ii) $e(G, S) = 0 \Leftrightarrow (G : S) < \infty$.

(iii) Se $S \subset T \subset G$, com $(G : T) < \infty$ então $e(G, S) = e(T, S)$.

(iv) Se S é um subgrupo normal em G então $e(G, S) = e(G/S)$.

(v) Se S é um subgrupo normal e finito de G então $e(G, S) = e(S)$.

(vi) Sejam A e S grupos não triviais. Se $A = S = \mathbb{Z}_2$ então $e(A * S, S) = 1$, caso contrário, $e(A * S, S) = \infty$.

(vii) Se G é um grupo livre e S é um subgrupo finitamente gerado de G tal que $(G : S) = \infty$ então $e(G, S) = \infty$. ■

Com relação a decomposição de grupos para grupos finitos já temos a classificação dada por Stallings. Pensando em grupos mais gerais, Scott em [17] mostrou que:

Proposição 4.2.1 *Se G se decompõe sobre S então $e(G, S) \geq 2$.*

Demonstração: (Ver [17], Lema 1.8). A prova é muito semelhante à prova do Teorema 4.1.3. A idéia é produzir um conjunto quase invariante E de G/S que é não trivial, isto é, que E e seu complementar E^* em G/S sejam infinitos. ■

Exemplo 4.2.1 *Como já observamos no Exemplo 1.5.1, item 2,* $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}}$, *isto é,* $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *se decompõe sobre* $\mathbb{Z}$ *e* $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = e(\mathbb{Z}) = 2$.

Finalizando esta seção, observamos que Scott esperava provar a implicação contrária da Proposição 4.2.1: se $e(G, S) \geq 2$ então G se decompõe sobre S, ou ainda, sobre alguma extensão finita T de S, uma vez que para $S \subset T \subset G$, com $(T : S) < \infty$, tem-se $e(G, T) = e(G, S)$; logo, $e(G, S) \geq 2 \Leftrightarrow e(G, T) \geq 2$. No entanto, ele observou que isto era falso em geral:

Temos que se $G = A * C$, onde A e C são grupos não-triviais, então ou $e(G, C) = \infty$, ou ambos A e C têm ordem dois e $e(G, C) = 1$, ([17], Lema 2.6). Além disso, se $G = A * C$, então G se decompõe sobre C se, e somente se, A é um produto livre não-trivial ou é cíclico infinito ([17], Lema 2.7). Assim, considerando A e C grupos simples infinitos finitamente gerados e $G = A * C$, então $e(G, C) = \infty$. É claro também que A não é um produto livre não trivial, nem cíclico infinito. Daí, temos que G não se decompõe sobre C.

O resultado obtido por Scott foi o seguinte:

Teorema 4.2.1 *([17], Teorema 4.1) Se* G *e* S *são grupos finitamente gerados e* G *é* S*-residualmente finito (isto é, dado* $g \in G - S$, *existe um subgrupo* G_1 *de índice finito em* G *tal que* $G_1 \supset S$ *mas* $g \notin G_1$*). Então* $e(G, S) \geq 2$ *se, e somente se,* G *tem um subgrupo* G_2 *de índice finito em* G *tal que* $G_2 \supset S$ *e* G_2 *se decompõe sobre* S. ■

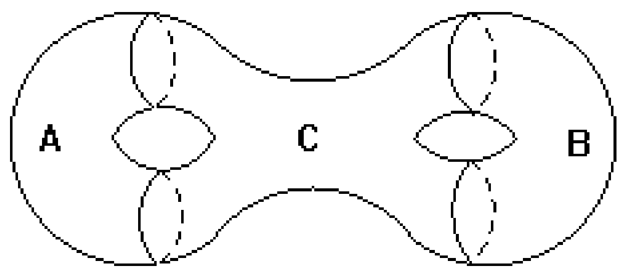
Como já mencionado, decomposição de grupos surge naturalmente quando calculamos, através do Teorema de Van Kampem, o grupo fundamental de superfícies. Também há um interpretação topológica para $e(G, S)$ quando G é o grupo fundamental de uma superfície fechada. Através dessa interpretação, podemos dar exemplos de pares (G, S), com G finitamente gerado, para os quais $e(G, S)$ assume valores diferentes de $0, 1, 2$ ou ∞, como segue.

Definição 4.2.2 *(a) Seja* H *uma superfície e* C *uma circunferência mergulhada em* H. *Dizemos que* C *é* incompressível *em* H *se a aplicação natural* $\Pi_1(C) \to \Pi_1(H)$ *é injetiva (onde* Π_1 *indica o grupo fundamental).*

(b) Seja Y uma sub-superfície compacta de H. Dizemos que Y é incompressível em *H se toda componente de bordo de Y é incompressível em H.*

Proposição 4.2.2 *([17], Lema 2.2) Sejam G o grupo fundamental de uma superfície fechada H e S o grupo fundamental de uma sub-superfície Y de H, compacta e incompressível (em H). Então $e(G, S)$ é igual ao número de componentes de bordo de Y.* ■

Exemplo 4.2.2 *Consideremos $H = T^2 \# T^2$ (soma conexa de 2 toros), G o grupo fundamental de H e S o grupo fundamental da sub-superfície incompressível C de H como na figura:*



Note que por van Kampem, $G = \Pi_1(H) = \Pi_1(A \cup C) *_{\Pi_1(C)} \Pi_1(B \cup C)$, isto é, G se decompõe sobre o subgrupo (infinito) $\Pi_1(C)$ e $e(G, S) = 4 \geq 2$.

4.3 A obstrução *sing* e decomposição de grupos

Vimos que $e(G)$ assume os valores 0, 1, 2 e ∞ (Teorema 4.1.1, item 7). O resultado de Stallings trata de decomposição de grupos quando $e(G) \geq 2$. Assim, é interessante tratar de decomposição de grupos quando $e(G) = 1$.

Sabemos pela Proposição 4.1.3 que se G é de dualidade então $e(G) = 1$. Assim, é interessante considerar decomposição para grupos de dualidade. O trabalho de Kropholler e Roller ([12]) vai nessa direção.

Dados G um grupo e S um subgrupo de G com G e S finitamente gerados, Kropholler e Roller em [12], supondo que $H^1(G, \mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2$, ou equivalentemente

$\tilde{e}(G,S)=2$, apresentaram uma condição necessária e suficiente, para que G admita uma decomposição sobre um subgrupo comensurável a S. A condição é que uma obstrução "$sing_G S$", definida pelos autores, seja nula.

O principal resultado apresentado por Kropholler e Roller envolvendo esta obstrução é: *Se G é um PD^n-grupo e S é um PD^{n-1}-subgrupo, então G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S se, e somente se, $sing_G S = 0$.*

Nosso objetivo aqui é provar uma dessas implicações, a saber, nas condições acima, se G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S então $sing_G S = 0$. A recíproca, embora interessante, não será abordada nesse trabalho.

Definição 4.3.1 *Dois subgrupos S e T de um grupo G são ditos* comensuráveis *se, e somente se, $(S : S\cap T) < \infty$ e $(T : S\cap T) < \infty$.*

Exemplo 4.3.1 *Todo grupo é comensurável a ele mesmo.*

Exemplo 4.3.2 *Tomando $S = \mathbb{Z}\times\{0\}$ e $T = G = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_3$, temos que S e T são comensuráveis.*

Proposição 4.3.1 *Qualquer subgrupo comensurável a um PD^{n-1}-subgrupo é ainda um PD^{n-1}-subgrupo.*

Demonstração: Sejam S e T subgrupos comensuráveis de um grupo G, onde T é um PD^{n-1}-subgrupo. Então, $(S : S\cap T) < \infty$ e $(T : S\cap T) < \infty$. Como T é um PD^{n-1}-subgrupo e como $(T : S\cap T) < \infty$, temos que $S\cap T$ é um PD^{n-1}-subgrupo. Por Bieri [5], temos, como $(S, S\cap T) < \infty$, que S é um PD^{n-1}-subgrupo. ■

Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e

$$\mathcal{F}_S G := \{B \subset G \mid B \subset F.S \text{ para algum subconjunto finito } F \text{ de } G\}.$$

Claramente $\mathcal{F}_S G$ é um $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $\wp(G)$ com as operações induzidas.

Consideremos o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $Ind_S^G\overline{\mathbb{Z}_2S} = \overline{\mathbb{Z}_2S}\otimes_{\mathbb{Z}_2S}\mathbb{Z}_2G$ com a G-ação natural de módulo induzido ($g.(g_1\otimes m) = gg_1\otimes m$). Temos que $\overline{\mathbb{Z}_2S}\otimes_{\mathbb{Z}_2S}\mathbb{Z}_2G$ e $\mathcal{F}_S G$ são $\mathbb{Z}_2G$-isomorfos (ver [4], §3, Proposição 7).

O lema seguinte é necessário para definir a obstrução para decomposição:

Lema 4.3.1 *Seja G um PD^n-grupo e S um PD^{n-1}-subgrupo. Então o grupo de cohomologia $H^1(G, \mathcal{F}_S G)$ é de dimensão 1 e assim, contém uma única classe de cohomologia não trivial.*

Demonstração: Temos que

$$H^1(G, \mathcal{F}_S G) \simeq H_{n-1}(G, \mathcal{F}_S G), \text{ pois } G \text{ é um } PD^n - \text{grupo}.$$

Pelo Lema de Shapiro, $H_{n-1}(G, \mathcal{F}_S G) \simeq H_{n-1}(S, \overline{\mathbb{Z}_2 S})$, uma vez que $\mathcal{F}_S G \simeq \overline{\mathbb{Z}_2 S} \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \mathbb{Z}_2 G = Ind_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}$.

Como S é um PD^{n-1}-subgrupo, $H_{n-1}(S, \overline{\mathbb{Z}_2 S}) \simeq H^0(S, \overline{\mathbb{Z}_2 S})$.

Portanto, $H^1(G, \mathcal{F}_S G) \simeq H^0(S, \overline{\mathbb{Z}_2 S}) = H^0(S, Hom(\mathbb{Z}_2 S, \mathbb{Z}_2)) =$
$= Hom(\mathbb{Z}_2 S, \mathbb{Z}_2)^S \simeq Hom_{\mathbb{Z}_2 S}(\mathbb{Z}_2 S, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$. ■

Definição 4.3.2 *Considere $res_G^S : H^1(G, \mathcal{F}_S G) \to H^1(S, \mathcal{F}_S G)$ a aplicação restrição e suponhamos $H^1(G, \mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2$. Seja ξ o gerador de $H^1(G, \mathcal{F}_S G)$. Definimos por $sing_G S$ o elemento $res_G^S(\xi)$, isto é, $sing_G(S) = res_G^S(\xi)$.*

Suponhamos que

(i) G é um grupo finitamente gerado;

(ii) S é um subgrupo de G finitamente gerado;

(iii) $H^1(G, \mathcal{F}_S G)$ tem dimensão 1.

Note que o módulo $\overline{\mathbb{Z}_2 S} \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \mathbb{Z}_2 G \simeq \mathcal{F}_S G$ permanece inalterado se S é substituído por qualquer subgrupo comensurável.

De fato, $\mathcal{F}_S G = \mathcal{F}_K G$ se $K \leq S$ e $(S : K) < \infty$.

Temos que $\mathcal{F}_K G = \{H \subseteq G \mid H \subseteq g_1 K \cup \ldots \cup g_m K\}$.

Se $H \subseteq g_1 K \cup \ldots \cup g_m K \subseteq g_1 S \cup \ldots \cup g_m S$. Portanto, $\mathcal{F}_K G \subseteq \mathcal{F}_S G$.

Por outro lado, como $H \subseteq g_1 S \cup \ldots \cup g_n S$ e $(S : K) < \infty$, temos $S = \bigcup_{i=1}^{l} x_i K$.
Daí, $H \subseteq g_1(\bigcup_{i=1}^{l} x_i K) \cup \ldots \cup g_n(\bigcup_{i=1}^{l} x_i K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{l}(g_1 x_i K \cup \ldots \cup g_n x_i K)$ que é uma união finita. Logo, $\mathcal{F}_S G = \mathcal{F}_K G$ se $(S : K) < \infty$.

Definição 4.3.3 *Um subconjunto B é S-quase invariante se $B+gB$ é S-finito para todo $g \in G$. O que equivale a $[B]$ ser um ponto G-fixado deste módulo.*

Para um subconjunto B de G, seja $[B] = \{H \subset G; B + H \in \mathcal{F}_S G\}$ o conjunto de todos os subconjuntos de G cuja diferença simétrica com B é um conjunto S-finito.

O conjunto $\{[B] \mid B \subseteq G\}$ pode ser identificado com $\dfrac{\overline{\mathbb{Z}_2 G}}{\overline{\mathbb{Z}_2 S} \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \mathbb{Z}_2 G}$. Este é um G-módulo e $g[B] = [gB]$.

Para prosseguirmos na direção dos estudo de Kropholler e Roller, utilizaremos os Teoremas 2.2.1 e 2.2.2, que reescreveremos de uma forma unificada. Aqui também inclui-se os dois casos, o produto livre com subgrupo amalgamado e extensão HNN:

Teorema 4.3.1 *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G. Então G se decompõe sobre S se, e somente se, existe uma G-árvore Γ tal que:*

(I) G atua livre de pontos fixos (isto é, nenhum vértice de Γ é fixado por todo o grupo G).

(II) G atua transitivamente e sem inversão sobre as arestas de Γ, e

(III) S é o estabilizador de uma aresta. ■

Lema 4.3.2 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A obstrução $sing_G(S)$ é zero;

(ii) Existe um subconjunto S-quase invariante B, que não é S-finito nem S-cofinito, tal que $SB = B$.

Demonstração: Seja $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}_2 G$ uma resolução projetiva de F sobre $\mathbb{Z}_2 G$. Então $F \to \mathbb{Z}_2 S$ é também uma resolução de F sobre $\mathbb{Z}_2 S$, que é projetiva pelo fato que $\mathbb{Z}_2 G$ ser $\mathbb{Z}_2 S$-livre.

Da seqüência exata

$$0 \to \mathcal{F}_S G \overset{k}{\hookrightarrow} \wp(G) \to \frac{\wp(G)}{\mathcal{F}_S G} \to 0$$

obtemos o diagrama comutativo de complexos de cocadeias com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & Hom_G(\mathbb{Z}_2, \mathcal{F}_S G) & \to & Hom_G(\mathbb{Z}_2, \wp(G)) & \to & Hom_G(\mathbb{Z}_2, \frac{\wp(G)}{\mathcal{F}_S G}) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & Hom_S(\mathbb{Z}_2, \mathcal{F}_S G) & \to & Hom_S(\mathbb{Z}_2, \wp(G)) & \to & Hom_S(\mathbb{Z}_2, \frac{\wp(G)}{\mathcal{F}_S G}) & \to 0 \end{array}$$

Daí, aplicando $H^*(-)$, obtemos o diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & H^0(G,\mathcal{F}_S G) & \to & H^0(G,\wp(G)) & \to & H^0(G,\frac{\wp(G)}{\mathcal{F}_S G}) & \to & H^1(G,\mathcal{F}_S G) & \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow_i & & \downarrow_j & & \downarrow_{res^G_S} & \\
0 \to & H^0(S,\mathcal{F}_S G) & \to & H^0(S,\wp(G)) & \to & H^0(S,\frac{\wp(G)}{\mathcal{F}_S G}) & \to & H^1(S,\mathcal{F}_S G) & \cdots
\end{array}$$

Tanto em (i) como em (ii) temos $(G:S)=\infty$ e daí, $H^0(G,\mathcal{F}_S G) = Ind^G_S(\wp(S)) = 0$. Também, temos $H^1(G,\wp(G)) = 0$ pelo Lema de Shapiro. Assim,

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 \to \wp(G)^G \simeq \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\beta} & (\dfrac{\wp(G)}{\mathcal{F}_S G})^G & \xrightarrow{\delta} & H^1(G,\mathcal{F}_S G) & \to 0 \\
 & \downarrow_i & & \downarrow_j & & \downarrow_{res^G_S} & \\
0 \to (\mathcal{F}_S G)^S \hookrightarrow & \wp(G)^S & \xrightarrow{\alpha} & (\dfrac{\wp(G)}{\mathcal{F}_S G})^S & \xrightarrow{\rho} & H^1(S,\mathcal{F}_S G) & \to \cdots
\end{array}$$

A hipótese inicial (III) então mostra que $(\dfrac{\wp(G)}{\mathcal{F}_S G})^G$ tem dimensão dois, de modo que se tivermos B_1 e B_2 subconjuntos S-quase invariantes de G que não são nem S-finitos nem S-cofinitos, então $[B_1]=[B_2]$ ou $[B_1]=[B_2^c]$. Assim, mostramos que existe um subconjunto S-quase invariante B_0 de G que não é S-finito nem S-cofinito e então $\delta([B_0])$ é o elemento não trivial de $H^1(G,\mathcal{F}_S G)$.

Se $sing_G S$ é zero, então um diagrama mostra que $[B_0]$ pertence à imagem da aplicação α. Agora, $\wp(G)^S$ pode ser identificado com o conjunto de todos os subconjuntos B de G que satisfazem $SB = B$. Daí, um tal subconjunto B pode ser escolhido de modo que $[B] = \alpha(B) = [B_0]$ e então B tem as propriedades requeridas.

Seja $[B] \in (\dfrac{\wp(G)}{\mathcal{F}_S G})^G$ tal que $[B] \neq [\emptyset]$, $[B] \neq [G]$ e $SB = B$. Como $\wp(G)^G \simeq \mathbb{Z}_2$, $Im\beta = \{[\emptyset],\ [G]\}$ e então $[B] \notin Im\beta = Ker\delta$ e portanto $u := \delta([B]) \neq 0$ com $B \in \wp(G)^S$. Daí, pela comutatividade do diagrama $res^G_S u = res^G_S(\delta([B])) = (\rho\circ j)(B) = \rho(B) = (\rho\circ\alpha)(B) = 0$. Portanto, $sing_G S = 0$. ■

Lema 4.3.3 *Se T é comensurável a S então $sing_G T = 0$ se, e somente se, $sing_G S = 0$.*

Demonstração: É suficiente considerar o caso em que T é um subgrupo de índice finito em S e $sing_G T = 0$.

Se $sing_G T = 0$ usando o lema anterior, existe $B \subset G$ tal que $B + gB \in \mathcal{F}_T G$, $\forall g \in G$, $[B] \neq [\emptyset]$, $[B] \neq [G]$ e $TB = B$.

Como $(S : T) < \infty$, temos que $\mathcal{F}_T G = \mathcal{F}_S G$. Logo, $B + gB \in \mathcal{F}_S G$, $\forall g \in G$. $(*)$

Seja $H_0 = \{h_1, \ldots, h_n\}$ um conjunto de representantes para as classes laterais à esquerda de T em S.

Temos $B + H_0 B = B + (h_1 B \cup \ldots \cup h_n B) \subset (B + h_1 B) \cup \ldots \cup (B + h_n B) \subset F_1 S \cup \ldots \cup F_n S$, com $F_i \in FG$, $i = 1, \cdots, n$ por $(*) = (F_1 \cup \ldots \cup F_n)S$.

Portanto, $B + H_0 B \in \mathcal{F}_S G$ e daí, $[B] = [H_0 B]$.

Seja $B_0 := H_0 B$. Então

(a) $B_0 + gB_0 \in \mathcal{F}_S G$, $\forall g \in G$ pois $B_0 + gB_0 = H_0 B + gH_0 B = (H_0 B + B) + (B + gH_0 B) = (H_0 B + B) + B + g(h_1 B \cup \ldots \cup h_n B) = (H_0 B + B) + B + (gh_1 B \cup \ldots \cup gh_n B) \subset (B + H_0 B) + (B + gh_1 B) + \ldots + (B + gh_n B) \in \mathcal{F}_S G$ por $(*)$.

(b) $[B_0] \neq [\emptyset]$ e $[B_0] \neq [G]$ pois $[B_0] = [B]$ e $[B] \neq [\emptyset]$, $[G]$.

(c) $SB_0 = B_0$ pois claramente $B_0 \subset SB_0$ e como $SH_0 \subset S$ pois $H_0 \subset S$, $S = h_1 T \,\dot{\cup}\, \ldots \,\dot{\cup}\, h_n T = H_0 T$ e $TB = B$, temos $SB_0 = S(H_0 B) \subset SB = H_0 TB = H_0 B = B_0$.

Logo, B_0 satisfaz as condições do lema 4.3.2 (ii) para G e S.

Portanto, $sing_G S = 0$. ■

Estamos em condições agora de provar o resultado desejado:

Teorema 4.3.2 *Seja (G, S) um par grupo com G e S finitamente gerados. Sejam G um PD^n-grupo e S um PD^{n-1}-subgrupo. Se G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S então $sing_G S = 0$.*

Demonstração: Como visto no lema 4.3.3, podemos assumir que G se decompõe sobre S (ao invés de um subgrupo comensurável com S). Seja Γ uma árvore na qual G age (à direita, que também pode ser vista como uma ação à esquerda, se definimos $g.x := xg^{-1}$). Seja e uma aresta com estabilizador S, isto é, $S = \{g \in G \mid eg = e\}$.

Se e é removida de Γ, então obteremos dois pedaços disjuntos que denotaremos por Γ_0 e Γ_1.

Seja $B = \{g \in G \mid eg \in \Gamma_0\}$. Claramente, $SB = B$, pois se $s \in S$ e $g \in B$ então $e(sg) = (es)g = eg \in \Gamma_0$.

Além disso, $B + gB \in \mathcal{F}_S G$, $\forall g \in G$ pois $B - gB = \{y \in G \mid ey \in \Gamma_0 \text{ e } y \notin gB\} = \{y \in G \mid ey \in \Gamma_0 \text{ e } g^{-1}y \notin B\} = \{y \in G \mid ey \in \Gamma_0 \text{ e } eg^{-1}y \in \Gamma_1 \cup \{e\}\} = \{y \in G \mid ey^{-1}$ pertence ao menor caminho ligando e a $eg^{-1}\}$ (a última igualdade é obtida fazendo y^{-1} atuar à direita no caminho que liga ey a $eg^{-1}y$).

Como a ação é transitiva, existem $g_1, \ldots, g_k \in G$ tais que as arestas deste caminho são $eg_1, \ldots, eg_k$. Logo, para todo $y \in B - gB$, $ey^{-1} = eg_i$, para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$ e assim, $e = eg_i y$, isto é, $g_i y \in S$. Daí, existe $s \in S$ tal que $g_i y = s$, ou seja, $y = g_i^{-1}s$. Logo, $B - gB \subseteq g_1^{-1}S \cup \ldots \cup g_k^{-1}S$ e, portanto, $B - gB \in \mathcal{F}_S G$.

Analogamente,

$$\begin{aligned} gB - B = \{y \in G \mid y \in gB\} \text{ e } y \notin B\} = \{y \in G \mid g^{-1}y \in B \text{ e } y \notin B\} = \\ = \{y \in G \mid eg^{-1}y \in Y_0 \text{ e } ey \in Y_1 \cup \{e\}\} = \\ = \{y \in G \mid ey^{-1} \text{ pertence ao menor caminho ligando } eg^{-1} \text{ a } e\} \end{aligned}$$

e pelo mesmo raciocínio acima, obtemos $gB - B \in \mathcal{F}_S G$.

Daí, $B + gB = (B - gB) \cup (gB - B) \in \mathcal{F}_S G$. Agora, $[B] \neq [\emptyset]$ e $[B] \neq [G]$ segue do fato que a ação de G sobre os vértices de Γ é livre de pontos fixos.

Portanto, B satisfaz a condição (ii) do lema 4.3.2 e daí, $sing(S) = 0$. ■

Observação 4.3.1 *Conforme já observamos, embora não esteja apresentada neste trabalho, a recíproca do Teorema 4.3.2 também é válida. Ver [12], Teorema A.*

É interessante observar que a condição de que $H^1(G, \mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2$ é equivalente a $\tilde{e}(G, S) = 2$, onde $\tilde{e}(G, S)$ é o invariante que será definido a seguir:

4.3.1 O end $\tilde{e}(G, S)$

O invariante $\tilde{e}(G, S)$ foi definido por Kropholler e Roller implicitamente em [12] (1988) e explicitamente em [13] (1989). Apresentaremos aqui a definição deste invariante e algumas de suas propriedades. Para maiores detalhes e resultados adicionais ver [13].

Definição 4.3.4 *Seja (G,S) um par de grupos (com $(G:S)$ não necessariamente infinito). Então por definição,*

$$\tilde{e}(G,S) = dim_{\mathbb{Z}_2} H^0(G, \wp(G)/\mathcal{F}_S G) = dim_{\mathbb{Z}_2} (\wp(G)/\mathcal{F}_S G)^G.$$

Proposição 4.3.2 *(1) Se $(G:S) = \infty$ então $\tilde{e}(G,S) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G, \mathcal{F}_S G)$.*
(2) $\tilde{e}(G,\{1\}) = e(G)$ e mais geralmente, $\tilde{e}(G,F) = e(G)$ se F é um subgrupo finito de G
(3) $\tilde{e}(G,\{1\}) = e(G)$ e mais geralmente, $\tilde{e}(G,F) = e(G)$ se F é um subgrupo finito de G.
(4) $\tilde{e}(G,S) = 0$ se, e somente se, $(G:S) < \infty$.
(5) Se $S \leq T \leq G$ e $(G:T) < \infty$ então $\tilde{e}(G,S) = \tilde{e}(T,S)$.
(6) Se S é finitamente gerado e normal em G então $\tilde{e}(G,S) = e(G/S)$.
(7) Se $S \leq T \leq G$ e $(G:T) = \infty$ então $\tilde{e}(G,S) \leq \tilde{e}(G,T)$, em particular, considerando $S = \{1\}$ obtemos $e(G) \leq \tilde{e}(G,T)$.
(8) $e(G,S) \leq \tilde{e}(G,S)$.

Demonstração: ([13], Lemas 1.2; 2.4 e 2.5) ■

Notemos que o Lema 4.3.1 pode ser reescrito na linguagem de $\tilde{e}(G,S)$:
Se G é um PD^n-grupo e S um PD^{n-1}-subgrupo então $\tilde{e}(G,S) = 2$.

Observação 4.3.2 *Em [1], Andrade e Fanti definiram um invariante* end *generalizado $E(G,F,M)$ para um grupo G, $F = \{S_i, i \in I\}$ uma família não vazia de subgrupos de G com $(G:S_i) = \infty$ para todo $i \in I$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo qualquer. Tal invariante está relacionado com os ends anteriormente citados, em especial o invariante $E(G,\{S\},\mathcal{F}_S G)$ (que foi denotado por $\tilde{E}(G,S)$) está intimamente relacionado com $\tilde{e}(G,S)$ ([3], §5) e, conseqüentemente, com a obstrução sing. Usando o invariante $E(G,F,M)$ para módulos particulares alguns resultados sobre decomposição de grupos foram obtidos. Por exemplo, ([11], Teorema 4.1):*

Sejam G um grupo, $G_1,\ G_2$ e T subgrupos de G com, $G_1 \neq T \neq G_2$ e $(G : G_i) = \infty$, para $= 1, 2$, tem-se:

(a) Se G se decompõe sobre T na forma $G = G_1 *_T G_2$ então $E'(G, \{G_1, G_2\}) := E(G, \{G_1, G_2\}, \mathbb{Z}_2) = 1$.

(b) Se G se decompõe sobre T na forma $G = G_1 *_T$ então $E(G, \{G_1\}, \mathbb{Z}_2) = 2$.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, M. G. C. , FANTI, E. L. C. , A Relative Cohomological Invariant for Group Pairs, *Manuscripta Math.* n. 83, p.1-18, 1994.

[2] ANDRADE, M. G. C. , FANTI, E. L. C.; Uma nota sobre produtos Livres Amalgamados e HNN-grupos, *Métrica Estudos e Pesquisas em Matemática*, SJRP, v. 61, p. 1-5, 2002.

[3] ANDRADE, M. G. C. , FANTI, E. L. C. ; DACACCH, J. A., On Certain Relative Cohomological Invariants, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 21, n. 3, p. 335-351, 2005.

[4] ANDRADE, M. G. C., FANTI, E. L. C., SILVEIRA, F. S. M. Another characterization for a certain invariant for a group pair. International Journal of Pure and Applied Mathematics (To appear).

[5] BIERI, R.; *Homological Dimension of Discrete Groups*, Queen Mary College Math. Notes, Queen Mary College, London, 1976.

[6] BROWN, K. S. *Cohomology of Groups*, New York: Springer Verlag, 1982.

[7] CIOCA, D. M. *Cohomologia e Ends de Grupos*, Dissertação de Mestrado, IBILCE/UNESP, 1997

[8] COHEN, D. E. *Combinatorial Group Theory*, Queen Mary College, Mathematics Notes, London, 1978.

[9] COHEN, D. E. *Groups of cohomological dimensional one*, Springer Verlag, 1972.

[10] DICKS, W., DUNWOODY, M. J.; *Groups acting on graphs*, Cambridge University Press, 1989.

[11] FANTI, E. L. C. ; ANDRADE, M. G. C; PAPANI, F. M. G. A Relative Invariant, Duality and Splitting of Groups. Rev. Mat. Estat. v. 21(1), p. 131-141, 2003.

[12] KROPHOLLER, P. H.; ROLLER, M. A.; *Splittings of Poincaré Duality Groups*, Math. Z. 97, p. 421-438, 1988.

[13] KROPHOLLER, P. H.; ROLLER, M. A.; *Relative ends and duality groups*, Journal of Pure and Appl. Algebra 61, p.197 - 210, 1989.

[14] MUNKRES, J. R.; *Elements of Algebraic Topology*, Addinson-Wesley Publishing Company, Inc., (1984).

[15] RAGHURAM, A.; SURY, B.; *Groups Acting on Trees*, Indian Institute of Technology, 2002.

[16] SANTOS, A. P. *Cohomologia de Grupos e Invariantes Algébricos*, Dissertação de Mestrado, IBILCE/UNESP, 2006.

[17] SCOTT, G. P. Ends of pairs of groups In: *J. Pure Appl. Algebra* n.11, p. 179-198, 1977.

[18] SCOTT, G. P.; WALL, C. T. C. Topological methods in group theory, Homological Groups Theory, *London Math. Soc. Lecture Notes Series* n. 36, Cambridge, p. 137-203, 1979.

[19] SERRE, J-P.; *Trees*, Springer Berlin, 1980.