DISSERTAÇÃO DE MESTRADO 2010

Simetrias de Lie e a Equação Korteweg-de Vries Generalizada com Coeficientes Variáveis

Wescley Luiz de Souza

— Setembro de 2010 —

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA

Simetrias de Lie e a Equação Korteweg-de Vries Generalizada com Coeficientes Variáveis

Wescley Luiz de Souza
Orientadora: Profa. Érica de Mello Silva

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Mato Grosso como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física.

Cuiabá-MT
— Setembro de 2010 —

FICHA CATALOGRÁFICA

S731s

Souza, Wescley Luiz de.

Simetrias de Lie e a Equação Korteweg-de Vries Generalizada com Coeficientes Variáveis / Wescley Luiz de Souza. – Cuiabá (MT): O Autor, 2011.

87 f.: il.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Física). Universidade Federal de Mato Grosso. Instituto de Física. Programa de Pós – Graduação em Física.

Orientadora: Profª. Drª. Érica de Mello Silva.

Inclui bibliografia.

1. Leis de conservação. 2. Simetrias de Lie. 3. Equação Korteweg-de Vries . I. Título.

CDU: 531:512

Ficha elaborada por Ana Claudia P. Rubio – Bibliotecaria do IE/UFMT

Aos meus pais,
José Luiz e Eliane,
à minha irmã, Jackeline,
e à minha esposa, Priscila,
pelo amor incondicional por mim.

"Ainda que eu adquirisse a mais alta graduação acadêmica, conquistasse o maior cargo profissional e fosse condecorado com a maior menção honrosa que o homem pode receber, ou que ganhasse o prêmio nobel, sem amor (Deus) eu NADA SERIA"

Gilmar Borges

Agradecimentos

- Primeiramente agradeço a Deus, o Senhor dos Senhores e Rei dos Reis, pela Sua grande bondade e misericórdia, sem a qual nunca conseguiria concluir este trabalho.

- Agradeço a meus pais e minha irmã, que sempre me apoiaram nesta árdua caminhada, e também pela paciência e compreensão.

- À minha querida e amada esposa Priscila, pelo seu amor, paciência, respeito, compreensão e oração durante o mestrado, que sempre me fortaleceu nas horas mais difíceis

- À professora Érica pela paciência, dedicação e atenção com que sempre me orientou e me aconselhou durante essa fase tão importante da minha vida.

- Aos meus sogros, que acompanharam essa fase da minha vida, e sempre me ajudaram quando eu precisei.

- Ao meu amigo e irmão na fé Jones Queiróz, também mestrando em física, que sempre esteve comigo nos estudos, nas aulas, e principalmente nas conversas de corredor, as quais sempre me descontraiu e ajudou a superar muitas adversidades.

- Ao meu amigo e irmão na fé Lucas Jorge, que também fez mestrado em física e defendeu a sua dissertação no mesmo dia que eu, pois esteve comigo e com o Jones nessa caminhada, o qual muito me ajudou durante as aulas e desenvolvimento de trabalho.

- À todos os amigos, Vínicius, Clarice, Leodécio, Alexandra, Jorge, Roberto, que foram os meus companheiros durante a pós-graduação, que me ajudaram direta ou indiretamente, fica o meu agradecimento.

- Aos professores do curso de mestrado em física da UFMT Harold e Jorge Brito (Hulk), pelas sugestões e correções feitas no trabalho.

- À UFMT e ao Instituto de Física, pela oportunidade de fazer o curso.

- Finalmente, meu agradecimento à CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos uma classe generalizada de equações do tipo KdV, denotada na literatura por $K(m,n)$. Partimos da álgebra 4-dimensional da equação KdV padrão e obtivemos todas as classes de equações $K(m,n)$ com dependência espaço-temporal nos coeficientes que são invariantes por essa álgebra de simetria. Adicionalmente, algumas soluções invariantes e leis de conservação para casos particulares dessas novas equações foram estabelecidas.

Abstract

In this work we studied a generalized class of KdV-type equations which is usually denoted by $K(m,n)$ equations. Starting from the 4-dimensional Lie algebra of the standard KdV equation, we obtained all the $K(m,n)$ equations with space and time-dependent coefficients that are invariant under this symmetry algebra. Additionally, some invariant solutions and conservation laws for particular cases of these new equations were established.

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

O estudo das equações diferenciais parciais iniciou-se a partir das obras de Euler, D'Alembert, Lagrange e Laplace sobre a descrição da mecânica no *continuum.* Tais equações surgiram no contexto do desenvolvimento de modelos da física de meios contínuos como cordas vibrantes [1], campo gravitacional Newtoniano de matéria estendida [2], eletrostática [3], fluxo de líquidos [4] e, posteriormente, com a teoria da condução de calor, eletricidade e magnetismo [5]. A análise desses modelos desempenhou papel fundamental no estudo sistemático das equações diferencias parciais e na busca por soluções analíticas.

No período entre 1750 e 1900, uma gama de equações relacionadas a fenômenos físicos importantes surgiu, como a equação de Euler para descrever o fluxo de líquidos incompressíveis [6], as equações de Poisson e Laplace, aplicáveis a problemas de eletricidade e magnetismo [3], as equações de Maxwell na teoria eletromagnética [7]. Outra classe de equações que contribuiu para a compreensão de diversos fenômenos foi a equação de Korteweg-de Vries, ou equação KdV [8].

A equação KdV e suas variações

A equação KdV é uma equação diferencial parcial não-linear de terceira ordem, formulada para descrever o comportamento de ondas em canais rasos [8]. Um dos atrativos dessa equação é que ela possui soluções solitônicas. Um sóliton preserva sua forma ao interagir com outros sólitons, característica altamente desejável na descrição de determinados fenômenos, e está presente em todos os sistemas integráveis [9, 10, 11]. O primeiro relato desse tipo de solução foi feito em 1834 por J. S. Russell [12], mas a teoria dos sólitons se desenvolveu efetivamente a partir da tentativa de solucionar o problema de Fermi-Pasta-Ulam [13] sobre a propagação de fônons em uma rede anarmônica [14]. Foi verificado que a onda que se propagava na rede mantinha sua identidade após uma colisão, daí a denominação de sóliton. Além da equação KdV, outras equações diferenciais parciais associadas a fenômenos da física de fluídos [15] e da física de plasmas [16] também possuem soluções solitônicas [17].

Diversas variações da equação KdV foram propostas a fim de abranger a descrição de uma gama maior de fenômenos. Como exemplo, podemos citar a equação cKdV-mKdV (*combined KdV and mKdV equation*) [18, 19], uma combinação das equações KdV e mKdV (*modified KdV equation*), empregada na física de fluídos. Na física de plasmas, temos a equação BKdV (*Burgers KdV equation*) [20, 21]. Na literatura encontramos ainda a equação vcKdV (*variable coefficients KdV equation*) [22, 23], aplicável em problemas de óptica não-linear [24]. Outra variação importante é a das classes de equações KdV generalizadas, com parâmetros livres adicionais [25], utilizadas, por exemplo, no estudo de bolhas [26].

Dentre as classes de equações KdV generalizadas, temos particular interesse na chamada equação $K(m,n)$,

$$u_t + [u^m + (u^n)_{xx}]_x = 0 \ . \tag{1.1}$$

Esta generalização da equação KdV padrão levou à descoberta de soluções do tipo *compacton* [27]. Compactons são soluções com suporte compacto, ou seja, sólitons com comprimento de onda finito. Posteriormente, verificou-se que outras classes de equações diferenciais parciais também admitem soluções compacton [28].

Na teoria clássica de sólitons, os conceitos de integrabilidade e de colisões elásticas estão intimamente conectados. Porém, no domínio das equações $K(m,n)$, ainda não está claro se essas equações são integráveis [29]. Muito trabalho tem sido feito na tentativa de entender o mecanismo não-linear sujacente às equações $K(m,n)$ [30, 31, 32], incluindo uma generalização análoga da equação Sine-Gordon padrão [33]. Isso nos motivou a propor e a estudar classes de equações $K(m,n)$ com coeficientes variáveis, que denotamos por equação vc$K(m,n)$, tendo como ferramenta matemática o método de simetrias de Lie [34, 35, 36].

O método de simetrias de Lie

O desenvolvimento do método de simetrias iniciou-se no século XIX com Marius Shopus Lie ao estudar o grupo de transformações contínuas que deixavam invariantes as equações diferenciais [37]. Contudo, seu trabalho não foi explorado por um longo período, e uma análise sistemática do método só foi feita no final da década de 50 por Ovsiannikov, que construiu explicitamente soluções para problemas relevantes da Física Matemática [38].

O fundamento da teoria de simetrias de Lie está na invariância das equações diferenciais sob transformações de suas variáveis independentes e dependentes [34, 35, 36]. Essas transformações formam um grupo local de transformações pontuais (*simetrias pontuais*) que dependem somente dos parâmetros contínuos e mapeiam qualquer solução de uma equação diferencial em outra solução da mesma equação. As transformações das variáveis independentes e dependentes induzem a uma transformação no espaço de variáveis, incluindo as derivadas das variáveis dependentes (*simetrias de contato*). Os grupos de transformações são completamente caracterizados por seus geradores infinitesimais, sendo que estes compõem uma álgebra de Lie, determinada pelas constantes de estrutura. Se um sistema de equações diferenciais parciais for invariante sob a ação de um grupo de transformações pontuais de Lie, é possível encontrar soluções especiais (*soluções invariantes*) e outras classes de equações que também admitam essas simetrias. No processo de generalização de equações diferenciais parciais, o procedimento padrão consiste em escolher uma simetria inicial que corresponda à simetria de um conjunto mais restrito de equações [39, 40].

Outra implicação importante das simetrias contínuas em Física e em Matemática é a existência de leis de conservação. Tal conexão foi feita em 1918 por Emmy Noether ao provar que as simetrias da integral de ação levam a leis de conservação para as equações de Euler-Lagrange correspondentes [41]. Tais simetrias deixam as equações de Euler-Lagrange invariantes (*simetrias variacionais*). Contudo, Lagrangeanas só existem para tipos especiais de equações diferenciais, o que pode restringir a aplicabilidade do teorema de Noether. A fim de contornar essa dificuldade, Ibragimov desenvolveu um método baseado na concepção de equações adjuntas para equações não-lineares, que associa uma lei de conservação a cada simetria infinitesimal de uma equação diferencial arbitrária [42, 43].

O estudo da equação KdV e de suas variações tem sido feito através de diversos métodos analíticos, em particular, pelo método de simetrias de Lie [19, 29, 44, 45]. Essa abordagem tem se mostrado uma ferramenta poderosa na obtenção de generalizações de equações diferenciais parciais [39, 40, 46, 47], bem como na busca por soluções invariantes [48] e leis de conservação [49, 50, 51, 52].

Objetivos gerais e organização do trabalho

Neste trabalho partimos das simetrias da equação KdV clássica para obter classes de equações $K(m, n)$ com coeficientes variáveis, que denotamos por equação vc$K(m,n)$ (*variable coefficients* $K(m,n)$ *equation*). Além de soluções invariantes, construímos leis de conservação para alguns casos particulares das equações vc$K(m,n)$ encontradas. Uma vez que os cálculos decorrentes da aplicação do método de Lie são extensos e muitas vezes intratáveis manualmente, especialmente no caso de equações diferenciais parciais de ordem superior, utilizamos algumas subrotinas do pacote SADE (*Symmetry Analysis of Differential Equations*) [53], desenvolvido pelo Grupo de Física Matemática do Instituto de Física da UnB [54].

A apresentação do trabalho está estruturada da seguinte maneira. No capítulo 2 apresentamos algumas variações importantes da equação KdV encontradas na literatura. No capítulo 3 fazemos uma breve revisão do método de simetrias de Lie para equações diferenciais parciais. No capítulo 4 apresentamos as classes de equações vc$K(m,n)$, encontradas a partir da imposição da álgebra de simetria da equação KdV clássica, e algumas soluções invariantes para casos particulares dessas novas equações. No capítulo 5 abordamos de forma sucinta o teorema de Noether e o teorema da conservação desenvolvido por Ibragimov, bem como as leis de conservação que construímos para algumas das equações vc$K(m,n)$ obtidas. No capítulo 6 apresentamos as conclusões e perspectivas futuras para este trabalho.

Capítulo 2

A equação KdV e suas variações

Neste capítulo fazemos um breve histórico do surgimento da equação de Korteweg-de Vries, em 1895, e abordamos quatro variações da equação KdV encontradas na literatura. Em particular destacamos a equação $K(m, n)$, que nos motivou a propor e a estudar uma nova classe de equações, que denotamos por equação vc$K(m, n)$.

2.1 Equação KdV

Em agosto de 1834 o engenheiro naval britânico John Scott Russell observou no canal Eddinburgh-Glasgow, Escócia, uma onda se propagando na superfície da água sem se atenuar. Russell relatou tal observação em 1844, num encontro da BAAS (*British Association for the Advancement of Science*) [12]:

"*Eu estava observando o movimento de um barco que foi rapidamente retirado do canal por um par de cavalos, quando o barco parou de repente - mas não a massa de água do canal que este havia colocado em movimento; ela se acumulou ao redor da proa da embarcação em estado de agitação violenta e então, subitamente deixando-o para trás, deslizou com grande velocidade, assumindo a forma de uma grande onda solitária, uma elevação arredondada, suave e com um pico bem definido, que continuou o seu curso ao longo do canal aparentemente sem mudar de forma ou diminuir a velocidade. Eu segui montado no cavalo, e alcancei-a ainda viajando a umas oito ou nove milhas por hora, preservando sua forma original de uns trinta pés de largura e um pé e meio de altura. Sua altura diminuiu gradativamente, e após uma perseguição de uma ou duas milhas eu a perdi numa das sinuosidades do canal*".

Tal relato gerou grande polêmica científica – admitia-se até então que a dispersão levaria necessariamente a mudanças na forma da onda, e com isso a descoberta de Russell foi tratada com ceticismo. Alguns anos se passaram até que, em 1895, Diederik Korteweg e Gustav de Vries propuseram uma formulação matemática consistente para o fenômeno [8]. Eles mostraram que a onda solitária, ou sóliton, de Russell resultava do balanço entre a dispersão e os efeitos não-lineares, e que era solução analítica da equação diferencial conhecida hoje como equação KdV.

A equação KdV é uma equação diferencial parcial não-linear de terceira ordem, usualmente representada na forma

$$u_t + 2uu_x + u_{xxx} = 0 \ , \tag{2.1}$$

sendo $u = u(x, t)$ e uu_x e u_{xxx} os termos que representam, respectivamente, os efeitos não-lineares a dispersão da onda solitária. Posteriormente, verificou-se que a Eq. (2.1) poderia descrever uma grande variedade de fenômenos físicos, especialmente aqueles que apresentam ondas de choque, ondas viajantes e sólitons [55, 56]. A equação KdV também é utilizada em dinâmica de fluídos, aerodinâmica, turbulência e na descrição do comportamento de camadas de contorno e transporte de massa [57, 58]. Soluções da Eq. (2.1), obtidas de forma fechada, pelo método de aproximação por séries ou via métodos numéricos, são conhecidas para casos particulares de condições de contorno e condições iniciais [59, 60]. Porém, as soluções mais notáveis e importantes da equação KdV são as soluções do tipo sóliton [9, 10, 11], que também são admitidas por outras equações diferencias não-lineares integráveis, como a equação de Schrödinger [61].

Desde a época de sua formulação até os dias atuais, a equação KdV tem sido amplamente estudada através de diferentes abordagens matemáticas [56, 62]. Além disso, variações da Eq. (2.1) têm sido propostas no intuito de descrever fenômenos em áreas do conhecimento distintas, como física de plasmas [63] e fluxo de tráfego [64]. Vejamos algumas variações da equação KdV encontradas na literatura.

2.2 Equação cKdV-mKdV

As equações KdV e mKdV (*modified KdV*) são as equações não-lineares integráveis, e que portanto admitem soluções solitônicas, mais conhecidas. Porém, em muitos problemas da física de fluidos, da física do estado sólido e da teoria quântica de campos os termos não-lineares de ambas podem ser encontrados simultâneamente [65], o que levou ao surgimento da equação cKdV-mKdV (*combined KdV and mKdV* *equation*),

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u^2 u_x + \gamma u_{xxx} = 0 \ , \tag{2.2}$$

com parâmetros α, β, γ reais, $\alpha, \gamma > 0$. Se $\beta \to 0$, a Eq. (2.2) converge para a equação KdV padrão, Eq. (2.1), mas quando $\alpha \to 0$, a equação cKdV-mKdV transforma-se em

$$u_t + \beta u^2 u_x + \gamma u_{xxx} = 0 \ , \tag{2.3}$$

conhecida na literatura como equação mKdV (*modified KdV equation*) [18, 19].

A Eq. (2.2) também é empregada em diversos campos da ciência não-linear, como fluxo de tráfego [64], óptica não-linear [65], dinâmica dos fluídos [66], ondas acústicas (para certas redes anarmônicas) [67], dentre outros.

2.3 Equação BKdV

Outra variação da equação KdV padrão, denominada BKdV (*Burgers KdV equation*) [21], é dada por

$$u_t + \mu_1 u u_x + \mu_2 u_{xx} + \mu_3 u_{xxx} = 0 \ , \tag{2.4}$$

com parâmetros μ_i, $i = 1, 2, 3$ constantes. Quando $\mu_2 \to 0$, a Eq. (2.4) converge para a equação KdV clássica, Eq. (2.1); se $\mu_3 \to 0$, a equação BKdV toma a forma

$$u_t + \mu_1 u u_x + \mu_2 u_{xx} = 0 \ , \tag{2.5}$$

conhecida como equação de Burgers [68].

A Eq. (2.4) incorpora efeitos de não-linearidade, dissipação e dispersão, representados pelos termos $\mu_1 u u_x$, $\mu_2 u_{xx}$ e $\mu_3 u_{xxx}$, respectivamente. Tal abrangência faz com que a equação BKdV seja empregada na descrição de uma variada gama de fenômenos. Como exemplo, mencionamos o fato de que a equação BKdV é considerada a equação de transporte apropriada para descrever a propagação de ondas em tubos viscoelásticos [69], bem como a dinâmica de fluidos viscosos e incompressíveis [70]. A Eq. (2.4) também é utilizada em teorias de circuito não-linear [71] e de sistema de plasmas fracamente não-linear e com efeitos dissipativos [72].

2.4 Equação vcKdV

Sabe-se que a busca por soluções exatas das equações de evolução não-lineares é um dos principais focos dos matemáticos e físicos. Contudo, recentemente há um enorme interesse em estudar as equações de evolução não-lineares com coeficientes variáveis, pois quando parâmetros reais como a heterogeneidade do meio e não-uniformidade dos limites são consideradas nas situações físicas, essas equações fornecem modelos poderosos na descrição de vários aspectos de supercondutores [73], comunicações por fibra ótica [24], etc. Uma das equações de evolução não-lineares com coeficientes variáveis é a equação KdV com coeficientes variáveis (vcKdV)

$$u_t = f(x,t)uu_x + g(x,t)u_{xxx} \ , \quad f.g \neq 0 \ , \tag{2.6}$$

onde $f(x,t)$ e $g(x,t)$ são funções reais e suas formas dependem da física do problema.

Modelos da equação vcKdV são de grande importância em muitos campos da física e da engenharia. Por exemplo, estudos recentes revelaram que os condensados de Bose-Einstein quase-unidimensionais presos com interações átomo-átomo repulsivas e uma fraca excitação não-linear é governada por um modelo da equação vcKdV com termos adicionais devido a heterogeneidade na direção axial e um forte confinamento transversal do condensado [74]. As ondas aquáticas propagando em um canal com um fundo irregular e paredes deformadas [75], a propagação de ondas solitônicas fracamente não-linear em um túnel de águas rasa de profundidade variável [76] também são governadas por modelos da equação vcKdV.

Soluções exatas também foram obtidas da equação vcKdV. Em [77] soluções N-sólitons para a Eq. (2.6) foram obtidas. A solução analítica da equação vcKdV também tem sido utilizada de forma frutífera para explorar o fenômeno de bloqueio atmosférico [78], tanto que os dados reanalisados do caso de bloqueio de dipolo que aconteceu em 1973 feito pelo National Center For Environmental Prediction/National Center For Atmospheric Research (NCEP/NCAR) são bem descritos pela solução analítica da equação vcKdV.

A Eq. (2.6) foi explorada também pelo estudo de suas propriedades de simetria. Por exemplo, classificação de simetrias têm sidos feitas em [22], onde é mostrado que a Eq. (2.6) admite, no máximo, um grupo de simetrias de Lie pontual quadridimensional, e as que tem um grupo de simetrias de Lie pontual quadridimensional pode ser tranformadas na equação KdV ordinária via transformação pontual local.

2.5 Equação KdV generalizada

Na literatura as generalizações das equações de evolução não-linear têm atraído muita atenção. Por exemplo, a equação de Burgers generalizada, proposta em [79], modela problemas de dispersão populacional. A equação de Schrödinger não-linear generalizada, proposta em [80], descreve ondas se propagando em meios não-lineares e dispersivos e pode ser empregada, por exemplo, em óptica não-linear.

Analogamente, a equação KdV tem sido generalizada de várias maneiras. Shen e Xu [25] estudaram a equação KdV generalizada na forma

$$u_t = u_x u^{l-2} + \alpha[2u_{xxx}u^p 4pu^{p-1}u_x u_{xx} + p(p-1)u^{p-2}(u_x)^3] \ , \tag{2.7}$$

considerando as soluções do tipo ondas viajantes e usando teoria de bifurcação. Já Yang, Tao e Austin [26] obtiveram soluções do tipo ondas solitárias para a equação KdV generalizada com amortecimento dependente do tempo e termo de dispersão,

$$u_t + u^n u_x + \alpha(t)u + \beta(t)u_{xxx} = 0 \ , \tag{2.8}$$

usando o método tanh-coth, o método da função exponencial e o método seno-cosseno modificado.

2.5.1 Equação $K(m, n)$

Recentemente, uma generalização particular da equação KdV atraiu bastante atenção. Trata-se da equação proposta Rosenau e Hyamn [27], dada por

$$u_t + [u^m + (u^n)_{xx}]_x = 0 \ . \tag{2.9}$$

em que m e n são parâmetros reais. Essa equação, denominada $K(m, n)$, surgiu da necessidade de se compreender a formação de padrões de gotas em líquidos [27], e os autores descobriram, para certos valores dos parâmetros m e n, um novo tipo de onda solitária denominada *compacton*. Tais soluções, além do suporte compacto, possuem algumas características que as difere dos sólitons. Enquanto a largura do sóliton depende da amplitude, a largura e a amplitude de um compacton podem ser independentes [81].

Atualmente vários trabalhos sobre a equação $K(m, n)$ e suas soluções compactons têm sido propostos [27, 30, 31, 32], inclusive o estudo das propriedades de simetria desta equação [29]. Soluções do tipo compacton também foram encontradas para outras equações diferenciais parciais importantes, como as equações de modelos hidrodinâmicos para estudar efeitos de não-localidade temporal [82]; a equação de Ostrovsky, que descreve a propagação unidirecional de ondas longas e de pequena amplitude na superfície das águas em um canal [83]; equações de ondas hidromagnéticas em plasmas frios e de ondas acústicas em cristais anarmônicos [84].

Motivados pela aplicabilidade da equação $K(m,n)$ em tantos campos do conhecimento, nos propuzemos a generalizar essa classe de equações introduzindo coeficientes variáveis, ou seja

$$u_t + [fu^m + g(u^n)_{xx}]_x = 0 \ . \tag{2.10}$$

em que $f = f(x,t)$ e $g = g(x,t)$. Nos Capítulos 4 e 5, apresentamos as novas classes de equações $vcK(m,n)$ que encontramos [40], bem como algumas soluções invariantes e leis de conservação para casos particulares.

Capítulo 3

O método de simetrias de Lie

Neste capítulo faremos uma revisão da teoria desenvolvida por Shopus Lie, que introduziu o conceito de grupos de simetrias aplicado a equações diferenciais, tendo em vista a construção de soluções invariantes. As principais referências utilizadas foram [34, 35, 36], especialmente [35].

3.1 Grupos de transformações de Lie

Nas definições apresentadas a seguir, consideramos um domínio D com coordenadas locais $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, representadas por $\mathbf{x}$, e utilizamos a convenção de Einstein, ou seja, assumimos a soma sobre índices repetidos.

3.1.1 Grupo

Definição 3.1.1.1. *Um conjunto G é considerado um grupo se possuir uma lei de composição ϕ que satisfaz aos seguintes axiomas:*

1. *Propriedade de Fechamento: se a e b são elementos de G, $\phi(a, b)$ é um elemento de G;*

2. *Associatividade: se $a, b, c \in G$ então $\phi(a, \phi(b, c)) = \phi(\phi(a, b), c)$;*

3. *Elemento identidade: existe um único elemento identidade e, $e \in G$, tal que se $a \in G$, então $\phi(a, e) = \phi(e, a) = a$;*

4. *Elemento inverso: para qualquer elemento $a \in G$, existe um único elemento inverso $a^{-1} \in G$ tal que $\phi(a, a^{-1}) = \phi(a^{-1}, a) = e$.*

3.1.2 Grupo de transformações

Definição 3.1.2.1. *Seja* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$*,* $D \subset \mathbb{R}^n$*. O conjunto de transformações* $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)$ *definido para cada* $\mathbf{x}$ *em* D*, sendo* $\varepsilon \in S$*,* $S \subset \mathbb{R}$ *e* $\phi(\varepsilon, \delta)$ *a lei de composição dos parâmetros* ε *e* δ *em* S*, forma um grupo de transformações em* D *se:*

1. *Para cada parâmetro* ε *em* S *as transformações forem de um-a-um em* D*, ou seja,* $\mathbf{x}^* \in D$*;*

2. S*, com uma lei de composição* ϕ*, formam um grupo* G*;*

3. $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ *quando* $\varepsilon = \varepsilon_o$*, sendo* ε_o *a identidade e, ou seja,* $\mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon_o) = \mathbf{x}$*;*

4. *Se* $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)$ *e* $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{X}(\mathbf{x}^*; \delta)$*, então* $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \phi(\varepsilon, \delta))$*.*

3.1.3 Grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro

Definição 3.1.3.1. *Se um grupo* G *de transformações satisfaz aos axiomas da definição* (3.1.2.1) *e também aos seguintes:*

1. ε *é um parâmetro contínuo, ou seja,* S *é um intervalo de* $\mathbb{R}$*. Sem perda de generalidade podemos dizer que* $\varepsilon = 0$ *corresponde ao elemento identidade e;*

2. $\mathbf{X}$ *é infinitamente diferenciável com relação a* $\mathbf{x}$ *em* D *e uma função analítica de* ε *em* S*;*

3. $\phi(\varepsilon, \delta)$ *é uma função analítica de* ε *e* δ*, com* $\varepsilon \in S$ *e* $\delta \in S$*;*

então o grupo de transformações G *define um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro.*

Exemplo - Grupo de translações no plano:

$$x^* = x + \varepsilon \ ,$$
$$y^* = y \ ,$$

em que $\varepsilon \in \mathcal{R}$ e $\phi(\varepsilon, \delta) = \varepsilon + \delta$. Este grupo corresponde aos deslocamentos paralelos em relação ao eixo x.

3.2 Transformações infinitesimais

Seja um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, com lei de composição ϕ e identidade $\varepsilon = 0$, dado por

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\varepsilon) \ . \tag{3.1}$$

Expandindo a Eq. (3.1) em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^* &= \mathbf{x} + \varepsilon\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x};\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial^2 \varepsilon}(\mathbf{x};\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0}\right) + \cdots \\
&= \mathbf{x} + \varepsilon\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x};\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0}\right) + O(\varepsilon^2) \\
&= \mathbf{x} + \theta(\mathbf{x})\varepsilon + O(\varepsilon^2) \ , \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

com $\theta(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x};\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}$.

A transformação $\mathbf{x} + \varepsilon\theta(\mathbf{x})$ é denominada *transformação infinitesimal* do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq. (3.1).

3.2.1 Primeiro Teorema Fundamental de Lie

Antes do teorema, precisamos enunciar o lema seguinte:

Lema 3.2.1.1. *O grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro,* $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\varepsilon)$, *satisfaz à igualdade*

$$\mathbf{X}(\mathbf{x};\varepsilon + \Delta\varepsilon) = \mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{x};\varepsilon);\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon + \Delta\varepsilon)) \ . \tag{3.3}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{x};\varepsilon);\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon)) &= \mathbf{X}(\mathbf{x};\phi(\varepsilon,\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon))) \\
&= \mathbf{X}(\mathbf{x};\phi(\phi(\varepsilon,\varepsilon^{-1}),\varepsilon+\Delta\varepsilon)) \\
&= \mathbf{X}(\mathbf{x};\phi(\phi(0,\varepsilon+\Delta\varepsilon)) \\
&= \mathbf{X}(\mathbf{x};\varepsilon+\Delta\varepsilon) \ . \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Teorema 3.2.1.1. *(Primeiro Teorema Fundamental de Lie). Existe uma parametrização* $\tau(\varepsilon)$ *tal que o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq.* (3.1), *é equivalente à solução do problema de valor inicial para um sistema de equações* *diferenciais de primeira ordem*

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\tau} = \theta(\mathbf{x}^*) \ , \tag{3.5}$$

com

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} \quad \textit{quando } \tau = 0 \ . \tag{3.6}$$

Em particular

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Gamma(\zeta) d\zeta \ , \tag{3.7}$$

sendo

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\partial(\phi(a,b))}{\partial b}\Big|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)} \ , \tag{3.8}$$

ε^{-1} *o elemento inverso de* ε, *e*

$$\Gamma(0) = 1 \ . \tag{3.9}$$

O Primeiro Teorema Fundamental de Lie, teorema 3.2.1.1, mostra que as transformações infinitesimais contêm a informação essencial para a determinação do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro. É sempre possível reparametrizar um dado grupo em termos de um parâmetro τ de modo que, para valores τ_1 e τ_2, a lei de composição seja $\phi(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 + \tau_2$. O teorema 3.2.1.1 também mostra que o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq. (3.1), define um fluxo estacionário dado pelas equações (3.5)-(3.6), e que qualquer fluxo estacionário descrito pelas equações (3.5)-(3.6) corresponde a um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq. (3.1).

3.2.2 Geradores infinitesimais

Tendo em vista o Primeiro Teorema Fundamental de Lie, teorema 3.2.1.1, sem perda de generalidade, assumimos que o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq. (3.1), é tal que sua lei de composição é dada por $\phi(a,b) = a + b$, com $\varepsilon^{-1} = -\varepsilon$ e $\Gamma(\varepsilon) \equiv 1$.

Definição 3.2.2.1. *O gerador infinitesimal do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq.* (3.1), *é o operador diferencial parcial*

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}) \cdot \bigtriangledown = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \ , \tag{3.10}$$

sendo $\bigtriangledown$, o operador gradiente, dado por

$$\bigtriangledown = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \ . \tag{3.11}$$

Assim, para uma função diferenciável $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$,

$$\mathrm{X}F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(\mathbf{x}) \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i} \ . \tag{3.12}$$

Teorema 3.2.2.1. *Seja o operador $\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathbf{x})$ definido pela Eq. (3.10), e o operador $\mathrm{X}^k = \mathrm{X}\mathrm{X}^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$. O grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq. (3.1), é equivalente à expansão*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= e^{\varepsilon \mathrm{X}} \mathbf{x} = \mathbf{x} + \varepsilon \mathrm{X}\mathbf{x} + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathrm{X}^2 \mathbf{x} + \ldots \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon^k}{k!} \mathrm{X}^k \mathbf{x} \ , \end{aligned} \tag{3.13}$$

chamada Série de Lie de $\mathbf{x}$.

Como consequência do teorema 3.2.2.1, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.2.1. *Se $F(\mathbf{x})$ é infinitamente diferenciável, para um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq (3.1), com gerador infinitesimal dado pela Eq. (3.10), então*

$$F(\mathbf{x}^*) = F(e^{\varepsilon \mathrm{X}} \mathbf{x}) = e^{\varepsilon \mathrm{X}} F(\mathbf{x}) \ . \tag{3.14}$$

Exemplo - Grupo de rotações:

$$\begin{aligned} x^* &= x \cos \varepsilon + y \operatorname{sen} \varepsilon \ , \\ y^* &= -x \operatorname{sen} \varepsilon + y \cos \varepsilon \ . \end{aligned}$$

O infinitesimal para o grupo de rotações é dado por

$$\theta(\mathbf{x}) = (\theta_1(x, y), \theta_2(x, y)) = (\theta(x, y), \eta(x, y)) \ ,$$

sendo

$$\begin{aligned} \theta(x, y) &= \left. \frac{dx^*}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = y \ , \\ \eta(x, y) &= \left. \frac{dy^*}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -x \ , \end{aligned}$$

com correspondente gerador infinitesimal igual a

$$\mathrm{X} = \theta(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \ .$$

3.2.3 Funções invariantes

Definição 3.2.3.1. *Uma função infinitamente diferenciável $F(\mathbf{x})$ é uma função invariante do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq.* (3.1)*, se e somente se*

$$F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x}) \ . \tag{3.15}$$

Teorema 3.2.3.1. *$F(\mathbf{x})$ é invariante sob a ação do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq.* (3.1)*, se e somente se*

$$\mathrm{X}F(\mathbf{x}) \equiv 0 \ . \tag{3.16}$$

Teorema 3.2.3.2. *Para um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq.* (3.1)*, a identidade*

$$F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x}) + \varepsilon \tag{3.17}$$

é válida somente se $F(\mathbf{x})$ é tal que

$$\mathrm{X}F(\mathbf{x}) \equiv 1 \ . \tag{3.18}$$

3.2.4 Coordenadas canônicas

Seja um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq. (3.1). A mudança de coordenadas

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_n(\mathbf{x})) \tag{3.19}$$

transforma o gerador $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}$ no gerador de transformações infinitesimais

$$\mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial y_i} \ , \tag{3.20}$$

cujo infinitesimal, em relação às coordenadas $\mathbf{y}$ definidas em (3.19), é dado por

$$\eta(\mathbf{y}) = (\eta_1(\mathbf{y}), \eta_2(\mathbf{y}), \ldots, \eta_n(\mathbf{y})) = \mathrm{Y}\mathbf{y} \ . \tag{3.21}$$

Teorema 3.2.4.1. *O grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq.* (3.1)*, com relação às coordenadas* $\mathbf{y}$ *definidas na Eq.* (3.19)*, é dado por*

$$\mathbf{y}^* = e^{\varepsilon \mathrm{Y}} \mathbf{y} \ . \tag{3.22}$$

Definição 3.2.4.1. *Uma mudança de coordenadas como a da Eq.* (3.19) *define um conjunto de coordenadas canônicas para o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq.* (3.1)*, se, em termos dessas coordenadas, o grupo for dado por*

$$y_i^* = y_i, \ i = 1, 2, \ldots, n-1 \ , \tag{3.23}$$
$$y_n^* = y_n + \varepsilon \ . \tag{3.24}$$

Teorema 3.2.4.2. *Seja o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq.* (3.1)*. Existe um conjunto de coordenadas canônicas* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *tal que o grupo dado pela Eq.* (3.1) *é equivalente ao grupo definido pelas equações* (3.23)*-*(3.24)*.*

Teorema 3.2.4.3. *Em termos de qualquer conjunto de coordenadas canônicas,* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$*, o gerador infinitesimal do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq.* (3.1)*, é dado por*

$$\mathrm{Y} = \frac{\partial}{\partial y_n} \ . \tag{3.25}$$

3.2.5 Pontos e superfícies invariantes

Definição 3.2.5.1. *Uma superfície* $F(\mathbf{x}) = 0$ *é uma superfície invariante sob a ação do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq.* (3.1)*, se e somente se*

$$F(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \textit{quando} \quad F(\mathbf{x}) = 0 \ . \tag{3.26}$$

Teorema 3.2.5.1. *Uma superfície* $F(\mathbf{x}) = 0$*, escrita na forma*

$$F(\mathbf{x}) = x_n - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \ , \tag{3.27}$$

é dita ser invariante sob a ação do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq. (3.1)*, se e somente se*

$$\mathrm{X}F(\mathbf{x}) = 0 \quad \textit{quando} \quad F(\mathbf{x}) = 0 \ . \tag{3.28}$$

Definição 3.2.5.2. *Um ponto* $\mathbf{x}$ *é dito um invariante do grupo de transformações de Lie* (3.1) *se e somente se* $\mathbf{x}^* \equiv \mathbf{x}$ *sob a ação do grupo de transformações de Lie* *a 1-parâmetro, Eq.* (3.1)*.*

3.3 Prolongações

Considere um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eq. (3.1), associado a um sistema S de equações diferenciais com n variáveis independentes, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, e m variáveis dependentes, $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$. O grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, representado na forma

$$x^* = X(x, u; \varepsilon) \ , \tag{3.29}$$

$$u^* = U(x, u; \varepsilon) \ , \tag{3.30}$$

mapeia qualquer solução $u = \Theta(x)$ de S em outra família de soluções de S deixando S invariante. Em outras palavras, o sistema de equações S mantém-se inalterado em relação às variáveis transformadas das Eqs. (3.29)-(3.30), para qualquer que seja a solução $u = \Theta(x)$ de S.

O grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eqs. (3.29)-(3.30), associado a um sistema de equações diferenciais S, determina apropriadamente as transformações das derivadas de k-ésima ordem de u em relação a x, denotadas por $\partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u$. Já as transformações das derivadas das variáveis dependentes conduzem a extensões (prolongações) do grupo.

O grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eqs. (3.29)-(3.30), atua no espaço (x, u), enquanto o grupo estendido (prolongado) atua no chamado *espaço de jato* $(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u)$, que inclui as derivadas das variáveis dependentes.

Analogamente, as transformações infinitesimais do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro associado a um sistema de equações diferenciais S, Eqs. (3.29)-(3.30), também são prolongadas para atuarem no espaço de jato. Assim, falaremos de transformações estendidas (*prolongações*) e de transformações infinitesimais estendidas (*prolongações infinitesimais*) para o caso de uma variável dependente, u, e n variáveis independentes, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3.3.1 Prolongações - 1 variável dependente e 1 variável independente

O estudo das propriedades de invariância das equações diferenciais parciais de k-ésima ordem com uma variável dependente, u, e n variáveis independentes,

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nos conduz a extensões (prolongações) das transformações do espaço (x, u) para o espaço de jato $(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$.

Considere um conjunto de transformações pontuais

$$\tilde{x} = X(x, u) \ , \tag{3.31}$$

$$\tilde{u} = U(x, u) \ , \tag{3.32}$$

do tipo 1-a-1, em algum domínio D no espaço (x, u), com $X(x, u)$ e $U(x, u)$ diferenciáveis k vezes. As prolongações das transformações pontuais, Eqs. (3.31)-(3.32), preservam as condições de contato, ou seja,

$$du = u_{i_1} dx_{i_1} \ , \tag{3.33}$$

$$\vdots$$

$$du_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = u_{i_1 i_2 \ldots i_k} dx_{i_k} \ , \tag{3.34}$$

em algum domínido D no espaço $(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$, se e somente se

$$d\tilde{u} = \tilde{u}_{i_1} d\tilde{x}_{i_1} \ , \tag{3.35}$$

$$\vdots$$

$$d\tilde{u}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = \tilde{u}_{i_1 i_2 \ldots i_k} d\tilde{x}_{i_k} \ , \tag{3.36}$$

em um correspondente domínio $\tilde{D}$ no espaço $(\tilde{x}, \tilde{u}, \partial \tilde{u}, \ldots, \partial^k \tilde{u})$.

Vamos agora assumir uma somatória sobre índice repetido. Na Eq. (3.33), $du = u_{i_1} dx_{i_1}$ representa

$$du = u_j dx_j \ , \tag{3.37}$$

e na Eq. (3.34) $du_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = u_{i_1 i_2 \ldots i_k} dx_{i_k}$ representa o conjunto de equações

$$du_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = u_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j} dx_j, \ i_l = 1, 2, \ldots, n; l = 1, 2, \ldots, k-1 \ . \tag{3.38}$$

Introduzindo os operadores de derivação total,

$$D_i = \frac{D}{Dx^i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \ldots + u_{i i_1 i_2 \ldots i_n} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_n}} + \ldots \ , \tag{3.39}$$

com $i = 1, 2, \ldots, n$, temos as prolongações do grupo de transformações pontuais, Eqs. (3.31)-(3.32), dadas por

$$\tilde{u}_j = U_j(x, u, u_j), \ j = 1, 2, \ldots, n \ . \tag{3.40}$$

Das condições de contato, Eqs. (3.33)-(3.34), obtemos

$$\begin{aligned} d\tilde{u} &= (D_iU)dx_i \ , && (3.41)\\ d\tilde{x}_j &= (D_iX_j)dx_i, \ j=1,2,\ldots,n \ . && (3.42)\end{aligned}$$

Logo,

$$(D_iX_j)\tilde{u}_j = D_iU, \ i=1,2,\ldots,n \ . \tag{3.43}$$

Seja A uma matrix de ordem n, invertível, dada por

$$A = \begin{bmatrix} D_1X_1 & \ldots & D_1X_n \\ \vdots & & \vdots \\ D_nX_1 & \ldots & D_nX_n \end{bmatrix} . \tag{3.44}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1U \\ D_2U \\ \vdots \\ D_nU \end{bmatrix} , \tag{3.45}$$

leva à prolongação no espaço $(x,u,\partial u)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= X(x,u) \ , && (3.46)\\ \tilde{u} &= U(x,u) \ , && (3.47)\\ \partial\tilde{u} &= \partial U(x,u,\partial u) \ . && (3.48)\end{aligned}$$

De maneira geral, temos

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{i_1i_2\ldots i_{k-1}1} \\ \tilde{u}_{i_1i_2\ldots i_{k-1}2} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{i_1i_2\ldots i_{k-1}n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i_1i_2\ldots i_{k-1}1} \\ U_{i_1i_2\ldots i_{k-1}2} \\ \vdots \\ U_{i_1i_2\ldots i_{k-1}n} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1U_{i_1i_2\ldots i_{k-1}} \\ D_2U_{i_1i_2\ldots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_nU_{i_1i_2\ldots i_{k-1}} \end{bmatrix} , \tag{3.49}$$

sendo $i_l = 1,2,\ldots,n$ para $l=1,2,\ldots,k-1$, com $k=2,3,\ldots$, cujas prolongações para o espaço de jato $(x,u,\partial u,\partial^2 u,\ldots,\partial^k u)$ são dadas por

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &= X(x,u) \ , && (3.50)\\
\tilde{u} &= U(x,u) \ , && (3.51)\\
\partial\tilde{u} &= \partial U(x,u,\partial u) \ , && (3.52)\\
&\vdots \\
\partial^k\tilde{u} &= \partial^k U(x,u,\partial u,\partial^2 u,\ldots,\partial^k u) \ . && (3.53)
\end{aligned}
$$

Portanto, se as transformações pontuais, Eqs. (3.31)-(3.32), definem um grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, descrito por

$$
\begin{aligned}
x^* = X(x,u;\varepsilon) \ , && (3.54)\\
u^* = U(x,u;\varepsilon) \ , && (3.55)
\end{aligned}
$$

atuando no espaço (x,u), então suas correspondentes k-ésimas prolongações para o espaço de jato $(x,u,\partial u,\partial^2 u,\ldots,\partial^k u)$, definidas por

$$
\begin{aligned}
x^* &= X(x,u;\varepsilon) \ , && (3.56)\\
u^* &= U(x,u;\varepsilon) \ , && (3.57)\\
\partial u^* &= \partial U(x,u,\partial u;\varepsilon) \ , && (3.58)\\
&\vdots \\
\partial^k u^* &= \partial^k U(x,u,\partial u,\partial^2 u,\ldots,\partial^k u;\varepsilon) \ , && (3.59)
\end{aligned}
$$

definem um grupo de transformações prolongado em que

$$
\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U \\ D_2 U \\ \vdots \\ D_n U \end{bmatrix} \ , \qquad (3.60)
$$

$$
\begin{bmatrix} u^*_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ u^*_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ u^*_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ D_2 U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \end{bmatrix} \ . \qquad (3.61)
$$

3.3.2 Prolongações infinitesimais - 1 variável dependente e n variáveis independentes

Seja o grupo de transformações infinitesimais de Lie a 1-parâmetro

$$x_i^* = X_i(x,u;\varepsilon) = x_i + \varepsilon\theta_i(x,u) + O(\varepsilon^2) \ , \tag{3.62}$$

$$u^* = U(x,u;\varepsilon) = u + \varepsilon\eta(x,u) + O(\varepsilon^2) \ , \tag{3.63}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, atuando no espaço (x, u), com geradores infinitesimais dados por

$$\mathrm{X} = \theta_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} \ . \tag{3.64}$$

Considere a k-ésima prolongação do grupo de transformações infinitesimais de Lie a 1-parâmetro, Eqs. (3.62)-(3.63), definidas por

$$\begin{aligned}
x_i^* &= X_i(x,u;\varepsilon) = x_i + \varepsilon\theta_i(x,u) + O(\varepsilon^2) \ , && (3.65)\\
u^* &= U(x,u;\varepsilon) = u + \varepsilon\eta(x,u) + O(\varepsilon^2) \ , && (3.66)\\
u_i^* &= U_i(x,u,\partial u;\varepsilon) = u_i + \varepsilon\eta_i^{(1)}(x,u,\partial u) + O(\varepsilon^2) \ , && (3.67)\\
&\vdots\\
u_{i_1 i_2 \ldots i_k}^* &= U_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x,u,\partial u,\ldots,\partial^k u;\varepsilon) \ ,\\
&= u_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \varepsilon\eta_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{(k)}(x,u,\partial u,\ldots,\partial^k u) + O(\varepsilon^2) \ , && (3.68)
\end{aligned}$$

em que $i = 1, 2, \ldots, n$ e $i_l = 1, 2, \ldots, n$ para $l = 1, 2, \ldots, k$, com $k = 1, 2, \ldots$. A k-ésima prolongação de seus infinitesimais é dada por

$$(\theta(x,u), \eta^{(1)}(x,u,\partial u), \ldots, \eta^{(k)}(x,u,\partial u,\ldots,\partial^k u)) \ , \tag{3.69}$$

com correspondente gerador infinitesimal prolongado até a k-ésima ordem

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}^{(k)} = \theta_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i} + \ldots\\
+ \eta_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{(k)}\frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_k}} \ .
\end{aligned} \tag{3.70}$$

As expressões para os infinitesimais prolongados $\{\eta^{(k)}\}$ são provenientes do seguinte teorema[1]

Teorema 3.3.2.1. *Os infinitesimais* $\eta_i^{(1)}$ *e* $\eta_i^{(k)}$ *do gerador infinitesimal prolongado,*

[1] A demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice A.

Eq. (3.70)*, são dados por*

$$\eta_i^{(1)} = D_i\eta - (D_i\theta_j)u_j, \ i = 1, 2, \ldots, n; \tag{3.71}$$

$$\eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = D_{i_k}\eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} - (D_{i_k}\theta_j)u_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j} \ , \tag{3.72}$$

com $i_l = 1, 2, \ldots, n$ *para* $l = 1, 2, \ldots, k$ *com* $k = 2, 3, \ldots$

Um resultado importante para este trabalho[2] decorre da aplicação do teorema (3.3.2.1) para o caso de uma variável dependente, u, e duas variáveis independentes, x_1 e x_2. O grupo de transformações infinitesimais de Lie a 1-parâmetro prolongado, Eqs. (3.65)-(3.68), é dado por

$$x_i^* = X_i(x_1, x_2, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon\theta_i(x_1, x_2, u) + O(\varepsilon^2) \ , \tag{3.73}$$

$$u^* = U_i(x_1, x_2, u; \varepsilon) = u + \varepsilon\eta(x_1, x_2, u) + O(\varepsilon^2) \ , \tag{3.74}$$

$$u_i^* = U_i(x_1, x_2, u, u_1, u_2; \varepsilon) = u_i + \varepsilon\eta_i^{(1)}(x_1, x_2, u, u_1, u_2) + O(\varepsilon^2) \ , \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned} u_{ij}^* &= U_i(x_1, x_2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}; \varepsilon) \\ &= u_{ij} + \varepsilon\eta_{ij}^{(2)}(x_1, x_2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}) + O(\varepsilon^2) \ , \end{aligned} \tag{3.76}$$

$i, j = 1, 2$, com correspondentes infinitesimais prolongados definidos por

$$\eta_1^{(1)} = \frac{\partial\eta}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}\right] u_1 - \frac{\partial\theta_2}{\partial x_1}u_2 - \frac{\partial\theta_1}{\partial u}(u_1)^2 - \frac{\partial\theta_2}{\partial u}u_1u_2 \ , \tag{3.77}$$

$$\eta_2^{(1)} = \frac{\partial\eta}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\theta_2}{\partial x_2}\right] u_2 - \frac{\partial\theta_1}{\partial x_2}u_1 - \frac{\partial\theta_2}{\partial u}(u_2)^2 - \frac{\partial\theta_1}{\partial u}u_1u_2 \ , \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned} \eta_{11}^{(2)} &= \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2} + \left[2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial u} - \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x_1^2}\right] u_1 - \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x_1^2}u_2 + \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - 2\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}\right] u_{11} - 2\frac{\partial\theta_2}{\partial x_1}u_{12} \\ &+ \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x_1\partial u}\right](u_1)^2 - 2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x_1\partial u}u_1u_2 - \frac{\partial^2\theta_1}{\partial u^2}(u_1)^3 - \frac{\partial^2\theta_2}{\partial u^2}(u_1)^2u_2 \\ &-3\frac{\partial\theta_1}{\partial u}u_1u_{11} - \frac{\partial\theta_2}{\partial u}u_2u_{11} - 2\frac{\partial\theta_2}{\partial u}u_1u_{12} \ , \end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned} \eta_{12}^{(2)} &= \eta_{21}^{(2)} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial x_2} + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial u} - \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x_1\partial x_2}\right] u_2 + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2\partial u} - \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x_1\partial x_2}\right] u_1 \\ &-\frac{\partial\theta_2}{\partial x_1}u_{22} + \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\theta_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\theta_2}{\partial x_2}\right] u_{12} - \frac{\partial\theta_1}{\partial x_2}u_{11} - \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x_1\partial u}(u_2)^2 - \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x_2\partial u}(u_1)^2 \\ &+ \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x_1\partial u} - \frac{\partial\theta_2}{\partial x_2\partial u}\right] u_1u_2 - \frac{\partial^2\theta_2}{\partial u^2}u_1(u_2)^2 - \frac{\partial^2\theta_1}{\partial u^2}(u_1)^2u_2^2 \ , \end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned} \eta_{22}^{(2)} &= \frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2} + \left[2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2\partial u} - \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x_1^2}\right] u_2 - \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x_2^2}u_2 + \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - 2\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2}\right] u_{22} - 2\frac{\partial\theta_1}{\partial x_2}u_{12} \\ &+ \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x_2\partial u}\right](u_1)^2 - 2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x_1\partial u}u_1u_2 - \frac{\partial^2\theta_2}{\partial u^2}(u_2)^3 - \frac{\partial^2\theta_1}{\partial u^2}u_1(u_2)^2 \\ &-3\frac{\partial\theta_2}{\partial u}u_2u_{22} - \frac{\partial\theta_1}{\partial u}u_1u_{22} - 2\frac{\partial\theta_1}{\partial u}u_2u_{12} \ . \end{aligned} \tag{3.81}$$

[2]Nos capítulos 4 e 5 lidaremos com classes de equações diferenciais que têm uma variável dependente, u, e duas variáveis independentes: uma coordenada espacial, x, e outra temporal, t.

3.4 Grupos de transformações multiparamétricas e álgebras de Lie

Nesta seção vamos estudar os grupos de transformações de Lie multiparamétricos, assumindo um número finito r de parâmetros, sendo que cada parâmetro do grupo leva a um gerador infinitesimal. O conjunto de geradores infinitesimais pertence a um espaço vetorial linear r-dimensional, que possui uma estrutura adicional chamada *comutador*, e é denominado *álgebra de Lie r-dimensional*.

3.4.1 Grupos de transformações multiparamétricas

Considere um grupo de transformações de Lie a r-parâmetros

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \varepsilon) \ , \tag{3.82}$$

com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r)$. Seja a lei de composição dos parâmetros dada por

$$\phi(\varepsilon, \delta) = (\phi_1(\varepsilon, \delta), \phi_2(\varepsilon, \delta), \ldots, \phi_r(\varepsilon, \delta)) \ ,$$

$\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r)$, e $\phi(\varepsilon, \delta)$ satisfazendo aos axiomas do grupo, com $\varepsilon = 0$ correspondendo à identidade $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_r = 0$.

A matriz infinitesimal $\Xi(\mathbf{x})$ é uma matriz $r \times n$ cujos elementos são dados por

$$\theta_{\alpha j}(\mathbf{x}) = \left.\frac{\partial x_j^*}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{\partial X_j(\mathbf{x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon=0} , \tag{3.83}$$

sendo $\alpha = 1, 2, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Seja $\Theta(\varepsilon)$ uma matriz $r \times r$ com elementos

$$\Theta_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \left.\frac{\partial \phi_\beta(\varepsilon, \delta)}{\partial \delta_\alpha}\right|_{\delta=0} , \tag{3.84}$$

e matriz inversa dada por

$$\psi(\varepsilon) = \Theta^{-1}(\varepsilon) \tag{3.85}$$

O Primeiro Teorema Fundamental de Lie, Teorema 3.2.1.1, afirma que o grupo de transformações de Lie a r-parâmetros, Eq. (3.82), em alguma vizinhança de $\varepsilon = 0$, é equivalente à solução para o problema de valor inicial de um sistema de nr equações diferenciais parciais de primeira ordem

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial x_1^*}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial x_2^*}{\partial \varepsilon_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial \varepsilon_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial x_1^*}{\partial \varepsilon_r} & \frac{\partial x_2^*}{\partial \varepsilon_r} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial \varepsilon_r} \end{bmatrix} = \psi(\varepsilon)\Xi(\mathbf{x}^*) \ , \tag{3.86}$$

com $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ em $\varepsilon = 0$.

Definição 3.4.1.1. *O gerador infinitesimal* X_α*, correspondente ao parâmetro* ε_α *do grupo de transformações de Lie a* r*-parâmetros, Eq.* (3.82)*, é dado por*

$$\mathrm{X}_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \theta_{\alpha j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r \ . \tag{3.87}$$

com $\theta_{\alpha j}(\mathrm{x})$ *definido pela Eq.* (3.83).

O grupo de transformações de Lie a r-parâmetros, Eq. (3.82), equivale a

$$\mathbf{x}^* = \prod_{\alpha=1}^{r} e^{\mu_\alpha \mathrm{X}_\alpha} \mathbf{x} = e^{\mu_1 \mathrm{X}_1} e^{\mu_2 \mathrm{X}_2} \cdots e^{\mu_r \mathrm{X}_r} \mathbf{x} \ , \tag{3.88}$$

com $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ constantes reais arbitrárias, e o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro

$$\mathbf{x}^* = e^{\varepsilon \mathrm{X}} \mathbf{x} = e^{\varepsilon \sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha \mathrm{X}_\alpha} \mathbf{x} \ , \tag{3.89}$$

define um subgrupo a 1-parâmetro do grupo de transformações de Lie a r-parâmetros, Eq. (3.82), em termos das constantes reais $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$.

3.4.2 Álgebras de Lie

Definição 3.4.2.1. *Considere um grupo de transformações de Lie a r-parâmetros, Eq.* (3.82)*, com geradores infinitesimais* $\{\mathrm{X}_\alpha\}$*,* $\alpha = 1, 2, \ldots, r$*, definidos na Eq.* (3.87).

O operador de primeira ordem

$$\begin{aligned}[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] &= \mathrm{X}_\alpha \mathrm{X}_\beta - \mathrm{X}_\beta \mathrm{X}_\alpha \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\left(\theta_{\alpha i}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\theta_{\beta j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \left(\theta_{\beta i}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\theta_{\alpha j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \eta_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \ , \end{aligned} \tag{3.90}$$

em que

$$\eta_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left[\theta_{\alpha i}(\mathbf{x}) \frac{\partial \theta_{\beta j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \theta_{\beta i}(\mathbf{x}) \frac{\partial \theta_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \tag{3.91}$$

é chamado comutador de X_α *e* X_β.

Da definição 3.4.2.1, segue que

$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = -[\mathrm{X}_\beta, \mathrm{X}_\alpha] \ . \tag{3.92}$$

Teorema 3.4.2.1. *(Segundo Teorema Fundamental de Lie). O comutador de dois geradores infinitesimais quaisquer de um grupo de transformações de Lie a r-parâmetros, Eq.* (3.82)*, é também um gerador infinitesimal do grupo. Em particular,*

$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} C_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathrm{X}_\gamma \ , \tag{3.93}$$

sendo $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ *as chamadas constantes de estrutura, com* $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r$.

Definição 3.4.2.2. *A Eq.* (3.93) *representa as relações de comutação do grupo de transformações de Lie a r-parâmetros, Eq.* (3.82)*, com geradores infinitesimais dados pela Eq.* (3.87).

Os geradores infinitesimais X_α, X_β e X_γ satisfazem à *identidade de Jacobi*

$$[\mathrm{X}_\alpha, [\mathrm{X}_\beta, \mathrm{X}_\gamma]] + [\mathrm{X}_\beta, [\mathrm{X}_\gamma, \mathrm{X}_\alpha]] + [\mathrm{X}_\gamma, [\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta]] = 0 \ . \tag{3.94}$$

Portanto, considerando as relações de comutação entre os geradores infinitesimais, Eqs. (3.92)-(3.94), podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.4.2.2. *(Terceiro Teorema Fundamental de Lie). As constantes de estrutura, definidas pela Eq.* (3.93)*, satisfazem às relações*

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = -C_{\beta\alpha}^{\gamma}, \tag{3.95}$$

$$\sum_{\rho=1}^{r} C_{\alpha\beta}^{\rho} C_{\rho\gamma}^{\delta} + C_{\alpha\gamma}^{\rho} C_{\rho\gamma}^{\delta} + C_{\gamma\alpha}^{\rho} C_{\rho\beta}^{\delta} = 0 \ . \tag{3.96}$$

Definição 3.4.2.3. *Uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ é um espaço vetorial para algum campo $\mathcal{F}$ com uma lei de combinação dos elementos em $\mathcal{L}$ (o comutador) satisfazendo às Eqs.* (3.92)-(3.94). *Em particular, os geradores infinitesimais* $\{\mathrm{X}_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$, *de um grupo de transformações de Lie a r-parâmetros, Eq.* (3.82), *formam uma álgebra de Lie r-dimensional, $\mathcal{L}^r$, sobre* $\mathbb{R}$.

Teorema 3.4.2.3. *Sejam* $\mathrm{X}_\alpha^{(k)}$ *e* $\mathrm{X}_\beta^{(k)}$ *os k-ésimos geradores infinitesimais prolongados dos geradores infinitesimais* X_α *e* X_β, *e seja* $[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta]^{(k)}$ *o k-ésimo gerador infinitesimal prolongado do comutador* $[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta]$. *Então*

$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta]^{(k)} = [\mathrm{X}_\alpha^{(k)}, \mathrm{X}_\beta^{(k)}], \;\; k = 1, 2, \ldots \;. \tag{3.97}$$

Assim, se $[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = \mathrm{X}_\gamma$ *temos*

$$[\mathrm{X}_\alpha^{(k)}, \mathrm{X}_\beta^{(k)}] = \mathrm{X}_\gamma^{(k)}, \;\; k = 1, 2, \ldots \;. \tag{3.98}$$

Definição 3.4.2.4. *Um subespaço $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}$ é uma subálgebra da álgebra de Lie $\mathcal{L}$ se, para quaisquer* $\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta \in \mathcal{J}$, $[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] \in \mathcal{J}$.

3.5 Equações diferenciais parciais

Nesta seção veremos o critério infinitesimal para a invariância de equações diferenciais parciais que nos permite obter os geradores admitidos por essas equações. Superfícies invariantes do grupo de transformações de Lie nos levam a soluções invariantes, obtidas ao se resolver um sistema de equações diferenciais parciais com número de variáveis independentes reduzido em relação ao das equações originais.

3.5.1 Invariância de uma equação diferencial parcial

Considere uma equação diferencial parcial de ordem k,

$$F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = 0 \;, \tag{3.99}$$

em que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ representa as n variáveis independentes, u denota a variável dependente, e $\partial^j u = \partial^j u / \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_j}$ indica o conjunto de todas as derivadas parciais de j-ésima ordem de u em relação a x, com $i_j = 1, 2, \ldots, n$ para $j = 1, 2, \ldots, k$.

Assumimos que a Eq. (3.99) pode ser escrita em termos de algumas derivadas de l-ésima ordem de u, ou seja,

$$F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\ldots,\partial^k u) = u_{i_1 i_2 \ldots i_l} - f(x,u,\partial u,\partial^2 u,\ldots,\partial^k u)\ , \tag{3.100}$$

com $f(x,u,\partial u,\partial^2 u,\ldots,\partial^k u)$ não dependentes de $u_{i_1 i_2 \ldots i_l}$.

Definição 3.5.1.1. *O grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eqs.* (3.29)-(3.30)*, deixa a Eq.* (3.99) *invariante se e somente se sua k-ésima prolongação, representada pelas Eqs.* (3.56)-(3.59) *e Eqs.* (3.60)-(3.61)*, deixam a superfície* (3.99) *invariante.*

Logo, a invariância da superfície (3.99) sob a ação da k-ésima prolongação grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eqs. (3.29)-(3.30), significa que uma solução qualquer $u = \psi(x)$ da Eq. (3.99) é mapeada em outra solução $u = \phi(x;\varepsilon)$ dessa mesma equação sob a ação do grupo (3.29)-(3.30). Em outras palavras, a família de soluções da Eq. (3.99) é invariante sob a ação do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eqs. (3.29)-(3.30), se e somente se a Eq. (3.99) admitir o grupo (3.29)-(3.30).

Teorema 3.5.1.1. *(Critério infinitesimal para a invariância de equações diferenciais parciais). Seja*

$$\mathrm{X} = \theta_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.101}$$

o gerador infinitesimal do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eqs. (3.29)-(3.30)*, com k-ésimo prolongamento é dado por*

$$\begin{aligned}\mathrm{X}^{(k)} = \theta_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i} + \ldots \\ + \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x,u,\partial u,\partial^2 u,\ldots,\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_k}}\ ,\end{aligned} \tag{3.102}$$

sendo $\eta_i^{(1)}$ definido pela Eq. (3.71) *e $\eta^{(j)}_{i_1 i_2 \ldots i_j}$ pela Eq.* (3.72)*, $i_j = 1,2,\ldots,n$ para $j = 1,2,\ldots,k$. Então o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eqs.* (3.29)-(3.30)*, é admitido pela Eq.* (3.99) *se e somente se*

$$\mathrm{X}^{(k)} F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\ldots,\partial^k u) = 0 \tag{3.103}$$

quando

$$F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\ldots,\partial^k u) = 0\ . \tag{3.104}$$

3.5.2 Soluções invariantes

Considere uma equação diferencial parcial escalar de ordem $k \geq 2$, Eq. (3.99), que admita o grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eqs. (3.29)-(3.30), com gerador infinitesimal dado pela Eq. (3.101) (assuma que $\theta(x,u) \neq 0$).

Definição 3.5.2.1. *A solução $u = \psi(x)$ é uma solução invariante da Eq.* (3.99), *correspondente ao gerador infinitesimal* (3.101) *que essa equação admite, se e somente se*

(i) $u = \psi(x)$ é uma superfície invariante do gerador definido pela Eq. (3.101)*;*

(ii) $u = \psi(x)$ é solução da Eq. (3.99).

A partir da definição 3.5.2.1, é possível afirmar que $u = \psi(x)$ também satisfaz às seguintes condições

(i) $\mathrm{X}(u - \psi(x)) = 0$ quando $u = \psi(x)$, ou seja

$$\theta_i(x,\psi(x))\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \eta(x,\psi(x)); \tag{3.105}$$

(ii) $F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\ldots,\partial^k u) = 0$, quando $\partial^k u = \partial^k \psi(x)$, ou seja

$$F(x,\psi(x),\partial\psi(x),\partial^2\psi(x),\ldots,\partial^k\psi(x)) = 0\ . \tag{3.106}$$

As soluções invariantes (consideradas primeiramente por Sophus Lie (1881)) são determinadas pelos métodos abaixo:

(a) **Método da Forma Invariante**. A EDP de primeira ordem (3.105) é resolvida através da resolução das equações características correspondentes para $u = \psi(x)$:

$$\frac{dx_1}{\theta_1(x,u)} = \frac{dx_2}{\theta_2(x,u)} = \ldots = \frac{dx_n}{\theta_n(x,u)} = \frac{du}{\eta(x,u)}\ . \tag{3.107}$$

Se $(w_1(x,u), w_2(x,u), \ldots, w_{n-1}(x,u)), v(x,u))$ são n invariantes independentes de (3.107) com $v_u \neq 0$, então a solução $u = \psi(x)$ de (3.105) é dada implicitamente pela forma invariante

$$v(x,u) = \phi(w_1(x,u), w_2(x,u), \ldots, w_{n-1}(x,u))\ , \tag{3.108}$$

onde ϕ é uma função arbitrária de $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$.

Assim, substituindo (3.108) em (3.99) obtemos um EDP reduzida com $n-1$ variáveis independentes $(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})$ e variável dependente v, e resolvendo-a encontramos soluções que são da forma $v = \phi(w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Portanto, a EDP (3.99) tem soluções invariantes dados implicitamente pela forma (3.108).

(b) **Método da Substituição Direta**. Esse método é útil caso a condição (3.105) não possa ser resolvida explicitamente, isto é, as equações características (3.107). Assumimos, sem perda de generalidade, que $\theta_n \neq 0$. Então

$$u_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i(x,u)}{\theta_n(x,u)} u_i + \frac{\eta(x,u)}{\theta_n(x,u)} \; . \tag{3.109}$$

Logo, qualquer termo que envolva derivadas com relação a x_n pode ser expresso em termos de x,u e derivadas de u em relação a $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Assim, substituindo diretamente (3.109) em (3.99) obtemos uma EDP reduzida com variável dependente u e $n-1$ variáveis independentes $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ e parâmetro x_n. Qualquer solução desta EDP reduzida define uma solução invariante da EDP (3.99). Para o caso $n = 2$ a EDP reduzida corresponde a uma EDO.

3.5.3 Sistema de equações determinantes

Seja

$$u_{i_1 i_2 \ldots i_l} = f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) \tag{3.110}$$

uma EDP de ordem k ($k \geq 2$) onde $f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ não dependa de $u_{i_1 i_2 \ldots i_l}$. O teorema 3.5.1.1 estabelece que a EDP (3.110) admite o grupo de transformações pontuais de Lie a 1-parâmetro com o gerador infinitesimal

$$\mathrm{X} = \theta_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} \; , \tag{3.111}$$

com sua k-ésima extensão dada por (3.102), se e somente se θ e η satisfizerem à equação determinante de simetria

$$\eta^{(l)}_{i_1 i_2 \ldots i_l} = \theta_j \frac{\partial f}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial f}{\partial u} + \eta^{(1)}_j \frac{\partial f}{\partial u_j} + \ldots + \eta^{(k)}_{j_1 j_2 \ldots j_k} \frac{\partial f}{\partial u_{j_1 j_2 \ldots j_k}} \; , \tag{3.112}$$

quando (3.110) é satisfeita.

Então, podemos afirmar que

(a) $\eta^{(k)}_{j_1 j_2 \cdots j_k}$ é linear nas componentes de $\partial^p u$ se $p \geq 2$;

(b) $\eta^{(k)}_{j_1 j_2 \cdots j_k}$ é um polinômio nas componentes de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^p u$, cujo coeficientes são lineares em $(\theta(x,u), \eta(x,u))$ e em suas derivadas parciais com relação a (x,u) até a ordem p.

De (i) e (ii) segue que se $f(x,u,\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ é um polinômio nas componentes de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$ então (3.112) é uma equação polinomial nas componentes de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$ cujos coeficientes são lineares em $(\theta(x,u), \eta(x,u))$ e em suas derivadas parciais até o ordem k. Observe que, para qualquer ponto x, podemos atribuir um valor arbitrário para cada componente de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$ desde que (3.110) seja satisfeita. Logo, usando (3.110) para eliminar $u_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ de (3.112) a equação polinomial resultante nas componentes of $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$ deve ser verdadeira para os valores arbitrários dessas componentes. Assim, os coeficientes da equação polinomial resultante devem ser igualados a zero separdamente, resultando em um sistema de equações diferenciais parciais lineares homogêneos para as $n+1$ funções $(\theta(x,u), \eta(x,u))$, chamado de conjunto de *equações determinantes* para os geradores infinitesimais $\{\mathrm{X}\}$ admitidos por (3.110). O conjunto de equações determinantes é usualmente chamado de sistema *sobredeterminando* de EDP's para $(\theta(x,u), \eta(x,u))$ já que geralmente há mais de $n+1$ equações determinantes.

Como exemplo, vamos considerar a equação diferencial parcial

$$u_t = u_x^2 \, , \tag{3.113}$$

em que $x_1 = x$ e $x_2 = t$. Os geradores de simetria da Eq (3.113) são

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}_1 &= -4tx\frac{\partial}{\partial x} - 4t^2\frac{\partial}{\partial t} + x^2\frac{\partial}{\partial u} \, , \\
\mathrm{X}_2 &= -2t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} \, , \\
\mathrm{X}_3 &= \frac{\partial}{\partial u} \, , \\
\mathrm{X}_4 &= \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 2tu\right)\frac{\partial}{\partial x} + xt\frac{\partial}{\partial t} + xu\frac{\partial}{\partial u} \, , \\
\mathrm{X}_5 &= t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} \, , \\
\mathrm{X}_6 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u} \, , \\
\mathrm{X}_7 &= \frac{\partial}{\partial x} \, , \\
\mathrm{X}_8 &= -4xu\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial t} - 4u^2\frac{\partial}{\partial u} \, , \\
\mathrm{X}_9 &= -2u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t} \, , \\
\mathrm{X}_{10} &= \frac{\partial}{\partial t} \, .
\end{aligned}$$

Neste caso temos dez constantes arbitrárias e os vetores de campo $\{\mathrm{X}_i\}$, $i =$

$1, \ldots, 10$ formam uma álgebra de Lie de dimensão 10[3].

[3]A resolução completa desse exemplo pode ser vista no Apênce B

Capítulo 4

A equação vc$K(m, n)$

Neste capítulo mostramos a aplicação do método de simetrias de Lie na obtenção de classes de equações vc$K(m, n)$ que admitem como álgebra de simetria subálgebras da álgebra de simetria da equação KdV clássica. Para os casos particulares das equações vc$K(m, n)$ encontradas [40], apresentamos algumas soluções invariantes.

4.1 Motivação

Conforme apresentado no capítulo 2, há mais de uma década a equação KdV,

$$u_t + \left[u^2 + u_{xx}\right]_x = 0 \; , \tag{4.1}$$

foi generalizada para uma classe de equações não-lineares, nomeada de equação $K(m, n)$ [27], dada por

$$u_t + [u^m + (u^n)_{xx}]_x = 0 \; , \tag{4.2}$$

e que para alguns valores de m e n, as soluções das equações $K(m, n)$ têm suporte compacto e amplitude independente da largura da onda [27]. Este tipo de solução é chamada *compacton* e, em natureza, é diferente da sóliton KdV, que estreita com o aumento da amplitude.

Na teoria clássica dos sólitons, integrabilidade e colisões elásticas estão intimamente relacionadas mas, no domínio das equações $K(m, n)$, embora algumas leis de conservação tenham sido obtidas, não se sabe exatamente em que circunstâncias essas equações são integráveis [29]. Um grande esforço tem sido feito com o intuito de compreender o mecanismo não-linear subjacente aos processos descritos pelas equações $K(m, n)$ [30, 31, 32], incluindo uma generalização análoga para a equação de Sine-Gordon [33]. O método de simetrias de Lie tem sido usado para este propósito, e também na classificação de grupos [44, 45].

Com o objetivo de obter generalizações de uma equação diferencial parcial, um procedimento padrão é a escolha de uma simetria inicial, que usualmente é considerada como a simetria de uma classe de equações mais restritiva. Esta abordagem tem sido adotada para obter, por exemplo, equações de Fokker-Planck generalizadas que admitem as simetrias de Lie de uma equação de difusão específica [39]. Nosso objetivo é seguir essa linha de raciocínio e estudar e classificar algumas equações $K(m, n)$. Considerando a álgebra de simetria de Lie da equação KdV clássica, ℓ_{KdV}, então passamos a encontrar todas as equações em um dada classe de equações $K(m, n)$ que são invariantes sob ℓ_{KdV}.

Vamos estudar classes de equações $K(m, n)$ não-lineares com coeficientes dependentes do espaço e do tempo, vc$K(m, n)$, representadas pela expressão

$$u_t + [fu^m + g(u^n)_{xx}]_x = 0 \ , \tag{4.3}$$

em que $u = u(x, t)$, $f = f(x, t)$, $g = g(x, t)$ e m e n são parâmetros reais.

4.2 As novas classes de equações vc$K(m, n)$

Vamos começar pelo conjunto de geradores de simetrias de Lie da equação KdV padrão, Eq. (4.1). Os geradores infinitesimais definidos na Eq. (3.10),

$$\mathrm{X} = \theta(x_1, x_2, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x_1, x_2, u)\frac{\partial}{\partial u} \ , \ \ i = 1, 2$$

em que $x_1 = x$ e $x_2 = t$, correspondem às simetrias de Lie pontuais

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_1 &= \partial_x \ , \\ \mathrm{X}_2 &= \partial_t \ , \\ \mathrm{X}_3 &= 2t\partial_x + \partial_u \ , \\ \mathrm{X}_4 &= x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u \ , \end{aligned} \tag{4.4}$$

sendo X_1 e X_2 os geradores de translação espacial e temporal, respectivamente. O gerador X_3 representa as transformações de Galileu, enquanto X_4 pode ser definido como um gerador de dilatações não-homogêneas.

Os geradores (4.4) compõem a álgebra 4-dimensional da equação KdV padrão, que denominaremos por ℓ_{KdV}. Considerando as relações de comutação estabelecidas na Eq. (3.93), obtemos

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_4] &= \mathrm{X}_1 \;, \\
[\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3] &= 2\mathrm{X}_1 \;, \\
[\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_4] &= 3\mathrm{X}_2 \;, \\
[\mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4] &= -2\mathrm{X}_3 \;, \\
[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2] &= [\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_3] = 0 \;,
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

ou seja, as subálgebras da álgebra de simetria ℓ_{KdV}, a saber

$$\{\mathrm{X}_1\}, \{\mathrm{X}_2\}, \{\mathrm{X}_3\}, \{\mathrm{X}_4\}, \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_4\}, \{\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3\}, \{\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_4\}, \{\mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4\}, \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4\} \;.$$

Nosso objetivo é construir classes de equações vc$K(m, n)$ que admitam como álgebra de simetria subálgebras da álgebra ℓ_{KdV}. Para implementar esse cálculo, é conveniente escrever a Eq. (4.3) de maneira mais geral, em termos de coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, 6$, arbitrários, ou seja

$$
\begin{aligned}
&u_t + a_0 u^m + a_1 u^{m-1} u_x + a_2 u^{n-2} u_x^2 + a_3 u^{n-1} u_{xx} \\
&\quad + a_4 u^{n-3} u_x^3 + + a_5 u^{n-2} u_x u_{xx} + a_6 u^{n-1} u_{xxx} = 0 \;.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Comparando as equações (4.6) e (4.3), as relações entre os coeficientes a_i e as funções $f = f(x, t)$ e $g = g(x, t)$ ficam então estabelecidas

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f_x \;, \\
a_1 &= mf \;, \\
a_2 &= n(n-1) g_x \;, \\
a_3 &= n g_x \;, \\
a_4 &= n(n-1)(n-2) g \;, \\
a_5 &= 3n(n-1) g \;, \\
a_6 &= n g \;.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

De acordo com a teoria estudada no Capítulo 3, o vetor de campo descrito pela Eq. (3.10) com $x_1 = x$ e $x_2 = t$,

$$\mathrm{X} = \theta_1(x, t, u)\partial_x + \theta_2(x, t, u)\partial_t + \eta(x, t, u)\partial_u \;, \tag{4.8}$$

é um gerador de simetria da Eq. (4.6) se esta for invariante sob a ação do grupo de transformações de Lie a 1-parâmetro, Eqs. (3.62)-(3.63) com $x_1 = x$ e $x_2 = t$,

$$x^* = x + \epsilon\theta_1(x,t,u) + O(\varepsilon^2)\ , \tag{4.9}$$
$$t^* = t + \epsilon\theta_2(x,t,u) + O(\varepsilon^2)\ , \tag{4.10}$$
$$u^* = u + \epsilon\eta(x,t,u) + O(\varepsilon^2)\ . \tag{4.11}$$

Conforme o Teorema (3.5.1.1), para que a Eq. (4.6) admita o grupo de transformações infinitesimais a 1-parâmetro das Eqs. (4.9)-(4.11), com gerador infinitesimal dado pela Eq. (4.8), os coeficientes $\theta_i,\ i = 1,2$ e η devem satisfazer ao sistema de equações de determinantes (3.112). Usando os recursos do pacote SADE [53], obtemos o sistema de equações determinantes

$$\begin{aligned}
eq_1 &: \left(a_6u^{n-1}\partial_{uuu} + a_5u^{n-2}\partial_{uu} + 2a_4u^{n-3}\partial_u\right)\theta_2 = 0\ ,\\
eq_2 &: \left(6a_6u^{n-1}\partial_{ux} + 2a_5u^{n-2}\partial_x + 2a_3u^{n-1}\partial_u\right)\theta_2 = 0\ ,\\
eq_3 &: \left(a_6u^{n-1}\partial_{uuu} + a_5u^{n-2}\partial_{uu} - a_4u^{n-3}\partial_u\right)\theta_1 = 0\ ,\\
eq_4 &: \left(3a_6u^{n-1}\partial_u\right)\theta_1 = 0\ ,\\
eq_5 &: \left(3a_6u^{n-1}\partial_{uu} + a_5u^{n-2}\partial_u\right)\theta_2 = 0\ ,\\
eq_6 &: \left(3a_6u^{n-1}\partial_{xx} + 2a_3u^{n-1}\partial_x\right)\theta_2 = 0\ ,\\
eq_7 &: \left(3a_6u^{n-1}\partial_{ux} + a_5u^{n-2}\partial_x\right)\theta_2 = 0\ ,\\
eq_8 &: \left(3a_6u^{n-1}\partial_{uu} + 2a_5u^{n-2}\partial_u\right)\theta_2 = 0\ ,\\
eq_9 &: \left(3a_6u^{n-1}\partial_u\right)\theta_2 = 0\ ,\\
eq_{10} &: \left(6a_6u^{n-1}\partial_{uu}\right)\theta_1 = 0\ ,\\
eq_{11} &: 3a_6u^{n-1}\partial_x\theta_2 = 0\ ,\\
eq_{12} &: (3\partial_u)\,\theta_1 - \left(3a_6u^{n-1}\partial_{uxx} + a_5u^{n-2}\partial_{xx} + 2a_3u^{n-1}\partial_{ux} + 2a_2u^{n-2}\partial_x\right)\theta_2 = 0\ ,\\
eq_{13} &: \left(3a_6u^{n-1}\partial_{uux} + 2a_5u^{n-2}\partial_{ux} + 3a_4u^{n-3}\partial_x + a_3u^{n-1}\partial_{uu} + a_2u^{n-2}\partial_u\right)\theta_2 = 0\ ,\\
eq_{14} &: \left(nu^{-1} - u\right)\eta + \left(\frac{(\partial_x a_6)}{a_6} - 3\partial_x\right)\theta_1\\
&\quad + \left(a_6u^{n-1}\partial_{xxx} + \frac{(\partial_t a_6)}{a_6} + a_3u^{n-1}\partial_{xx} + a_1u^{m-1}\partial_x - \partial_u + \partial_t\right)\theta_2 = 0\ ,\\
eq_{15} &: \left(3a_6u^{n-1}\partial_{uxx} + a_5u^{n-2}\partial_{xx} + 2a_3u^{n-1}\partial_{ux} + a_1u^{m-2}m\right)\eta\\
&\quad - \left(a_6u^{n-1}\partial_{xxx} + a_3u^{n-1}\partial_{xx} + a_1\frac{(\partial_x a_6)}{a_6}u^{m-1} - 4a_0u^m\partial_u + \partial_t\right)\theta_1\\
&\quad - \left(a_1\left(\frac{(\partial_t a_6)}{a_6} - \frac{(\partial_t a_1)}{a_1}\right)u^{m-1}\right)\theta_2 = 0\ ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
eq_{16} \ : \ & \left(3a_6u^{n-1}\partial_{uux} + 2a_5u^{n-2}\partial_{ux} + 3a_4u^{n-3}\partial_x - a_3u^{n-1}\partial_{uu} + a_2\left(u^{n-2}\partial_u - u^{n-3}\right)\right)\eta \\
& - \left(3a_6u^{n-1}\partial_{uxx} + a_5u^{n-2}\partial_{xx} + 2a_3u^{n-1}\partial_{ux} + a_2u^{n-2}\left(\frac{(\partial_x a_6)}{a_6} - \partial_x\right)\right)\theta_1 \\
& - \left((\partial_x a_2)u^{n-2} - 3a_1u^{m-1}\partial_u\right)\theta_1 - \left(a_2\left(\frac{(\partial_t a_6)}{a_6} - \frac{(\partial_t a_2)}{a_2}\right)u^{n-2}\right)\theta_2 = 0 \ , \\
eq_{17} \ : \ & \left(a_6u^{n-1}\partial_{uuu} + a_5u^{n-2}\partial_{uu} + 2a_4\left(u^{n-3}\partial_u - u^{n-4}\right)\right)\eta \\
& - \left(3a_6u^{n-1}\partial_{uux} + 2a_5u^{n-2}\partial_{ux} + a_4\frac{(\partial_x a_6)}{a_6}u^{n-3} - (\partial_x a_4)u^{n-3} + a_3u^{n-1}\partial_{uu}\right)\theta_1 \\
& - \left(2a_2u^{n-2}\partial_u\right)\theta_1 - \left(a_4\left(\frac{(\partial_t a_6)}{a_6} - \frac{(\partial_t a_4)}{a_4}\right)u^{n-3}\right)\theta_2 = 0 \ , \\
eq_{18} \ : \ & \left(3a_6u^{n-1}\partial_{uu} + a_5\left(u^{n-2}\partial_u - u^{n-3}\right)\right)\eta \\
& - \left(9a_6u^{n-1}\partial_{ux} + a_5\frac{(\partial_x a_6)}{a_6}u^{n-2} - (\partial_x a_5)u^{n-2} - a_3u^{n-1}\partial_u\right)\theta_1 \\
& - \left(a_5\left(\frac{(\partial_t a_6)}{a_6} - \frac{(\partial_t a_5)}{a_5}\right)u^{n-2}\right)\theta_2 = 0 \ , \\
eq_{19} \ : \ & \left(a_6u^{n-1}\partial_{xxx} + a_3u^{n-1}\partial_{xx} + a_1u^{m-1}\partial_x + a_0\left(u^m\partial_u + u^{m-1}(m-n+1)\right) + \partial_t\right)\eta \\
& - \left(a_0u^m\left(\frac{(\partial_x a_6)}{a_6} - \frac{(\partial_x a_0)}{a_0} - 3\partial_x\right)\right)\theta_1 \\
& - \left(a_0\left(\frac{(\partial_t a_6)}{a_6} - \frac{(\partial_t a_0)}{a_0}\right)u^m\right)\theta_2 = 0 \ , \\
eq_{20} \ : \ & \left(3a_6u^{n-1}\partial_{ux} + a_5u^{n-2}\partial_x\right)\eta \\
& - \left(3a_6u^{n-1}\partial_{xx} + a_3u^{n-1}\left(\frac{(\partial_x a_6)}{a_6} - \frac{(\partial_x a_3)}{a_3} - \partial_x\right)\right)\theta_1 \\
& - \left(a_5\left(\frac{(\partial_t a_6)}{a_6} - \frac{(\partial_t a_3)}{a_3}\right)u^{n-1}\right)\theta_2 = 0 \ .
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Vamos impor que a Eq. (4.6) admita como álgebra de simetria as subálgebras da álgebra de simetria ℓ_{KdV},

$$\{\mathrm{X}_1\}, \{\mathrm{X}_2\}, \{\mathrm{X}_3\}, \{\mathrm{X}_4\}, \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_4\}, \{\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3\}, \{\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_4\}, \{\mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4\}, \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4\} \ ,$$

substituindo os coeficientes θ_1, θ_2 e η de cada um desses geradores no sistema de equações determinantes (4.12). Assim, chegamos a um sistema de equações diferenciais não-lineares para os coeficients a_i, $i = 0, \ldots, 6$, com número de equações reduzido em relação ao do sistema anterior. Finalmente, resolvendo o sistema de equações para os coeficientes a_i, $i = 0, \ldots, 6$, encontramos as funções $f = f(x,t)$ e $g = g(x,t)$ e, consequentemente, as novas equações vc$K(m,n)$. Esse procedimento é ilustrado a seguir.

4.2.1 Equação vc$K(m,n)_{\{\mathbf{X_4}\}}$

Substituindo os coeficientes θ_1, θ_2 e η da álgebra $\{\mathbf{X_4}\}$ (subálgebra da álgebra ℓ_{KdV}) no sistema de equações determinantes (4.12) associado à Eq. (4.6), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais para os coeficientes a_i, $i = 0, \ldots, 6$:

$$
\begin{aligned}
eq_1 &: \; u^m \left(a_0 \left(\frac{(\partial_x a_6)}{a_6} x + 3 \frac{(\partial_t a_6)}{a_6} t + 2 \left(m - n - \frac{3}{2} \right) \right) - (\partial_x a_0) x - 3 (\partial_t a_0) t \right) = 0 \;, \\
eq_2 &: \; u^{m-1} \left(a_1 \left(\frac{(\partial_x a_6)}{a_6} x + 3 \frac{(\partial_t a_6)}{a_6} t + 2 \left(m - n - 1 \right) \right) - (\partial_x a_1) x - 3 (\partial_t a_1) t \right) = 0 \;, \\
eq_3 &: \; u^{n-2} \left(a_2 \left(\frac{(\partial_x a_6)}{a_6} x + 3 \frac{(\partial_t a_6)}{a_6} t - 1 \right) - (\partial_x a_2) x - 3 (\partial_t a_2) t \right) = 0 \;, \\
eq_4 &: \; u^{n-1} \left(a_3 \left(\frac{(\partial_x a_6)}{a_6} x + 3 \frac{(\partial_t a_6)}{a_6} t - 1 \right) - (\partial_x a_3) x - 3 (\partial_t a_3) t \right) = 0 \;, \\
eq_5 &: \; u^{n-3} \left(a_4 \left(\frac{(\partial_x a_6)}{a_6} x + 3 \frac{(\partial_t a_6)}{a_6} t \right) - (\partial_x a_4) x - 3 (\partial_t a_4) t \right) = 0 \;, \\
eq_6 &: \; u^{n-2} \left(a_5 \left(\frac{(\partial_x a_6)}{a_6} x + 3 \frac{(\partial_t a_6)}{a_6} t \right) - (\partial_x a_5) x - 3 (\partial_t a_5) t \right) = 0 \;, \\
eq_7 &: \; \frac{1}{2} \left(\frac{(\partial_x a_6)}{a_6} x + 3 \frac{(\partial_t a_6)}{a_6} t \right) - n + 1 = 0 \;.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

A fim de encontrar as funções $f(x,t)$ e $g(x,t)$, reescrevemos a eq_7 do sistema de equações (4.13) da seguinte maneira

$$
x \frac{\partial a_6}{\partial x} + 3t \frac{\partial a_6}{\partial t} = (2n-2) a_6 \;. \tag{4.14}
$$

De acordo com Seção 3.5 do Capítulo 3, podemos utilizar o método das características para obter soluções da Eq. (4.14). As equações características para a Eq. (4.14) são dadas pelo sistema

$$
\frac{dx}{x} = \frac{dt}{3t} = \frac{da_6}{(2n-2) a_6} \;. \tag{4.15}
$$

Resolvendo o sistema (4.15), encontramos

$$
\frac{t}{x^3} = C_1, \quad \frac{a_6}{x^{2n-2}} = C_2 \;, \tag{4.16}
$$

em que C_1 e C_2 são constantes de integração. Sendo a solução da Eq. (4.14) dada por

$$
\frac{a_6}{x^{2n-2}} = F \left(\frac{t}{x^3} \right) \;,
$$

temos

$$a_6 = F\left(\frac{t}{x^3}\right)x^{2n-2} \ ,$$

em que $F(.)$ é uma função arbitrária de seu argumento.

Uma vez que a_6 foi determinado, o sistema de equações (4.13) passa a ter equações independentes para os coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, 5$, remanescentes

$$\begin{cases} u^m[x(\partial_x a_0) + 3t(\partial_t a_0) - (2m-5)a_0] = 0 \ , \\ u^{m-1}[x(\partial_x a_1) + 3t(\partial_t a_1) - (2m-4)a_1] = 0 \ , \\ u^{n-2}[x(\partial_x a_2) + 3t(\partial_t a_2) - (2m-3)a_2] = 0 \ , \\ u^{n-1}[x(\partial_x a_3) + 3t(\partial_t a_3) - (2m-3)a_3] = 0 \ , \\ u^{n-3}[x(\partial_x a_4) + 3t(\partial_t a_4) - (2m-2)a_4] = 0 \ , \\ u^{n-2}[x(\partial_x a_5) + 3t(\partial_t a_5) - (2m-5)a_5] = 0 \ . \end{cases}$$

As relações (4.7) mostram que é necessário conhecer apenas os coeficientes a_1 e a_6 para determinar, respectivamente, $f(x,t)$ e $g(x,t)$. Portanto, procedendo de maneira análoga, encontramos

$$a_1 = F\left(\frac{t}{x^3}\right)x^{2m-4} \ ,$$

em que $F(.)$ é uma função arbitrária de seu argumento. Assumindo a forma mais simples possível para $F(.)$, ou seja, $F\left(\frac{t}{x^3}\right) = \frac{ct}{x^3}$, sendo c uma constante arbitrária, temos

$$f(x,t) = \frac{a_1}{m} = \frac{c_1 t}{m}x^{2m-7} \ ,$$
$$g(x,t) = \frac{a_6}{n} = \frac{c_2 t}{n}x^{2n-5} \ ,$$

e, consequentemente, a classe de equações vc$K(m,n)_{\{\mathbf{X_4}\}}$[1]

$$u_t + \left[\frac{c_1 t}{m}x^{2m-7}u^m + \frac{c_2 t}{n}x^{2n-5}(u^n)_{xx}\right]_x = 0 \ , \tag{4.17}$$

com constantes arbitrárias c_1 e c_2.

[1] A escolha das simetrias $\{X_1, X_4\}, \{X_2, X_4\}$ e $\{X_3, X_4\}$ leva a este mesmo resultado.

4.2.2 Equação vc$K(m,n)_{\{\mathbf{X_3}\}}$

Seguindo o mesmo procedimento da seção anterior, encontramos a classe de equações vc$K(m,n)$ que admite como gerador de transformações infinitesimais a simetria $\{\mathrm{X}_3\}$. A classe de equações vc$K(m,n)_{\{\mathbf{X_3}\}}$ é dada por

$$u_t + \left[\left(\frac{c_1 t}{m} e^{(1-m)x/2tu} + \frac{2u^{2-m}}{m(m-1)} \right) u^m + \frac{c_2 t}{n} e^{(1-n)x/2tu} (u^n)_{xx} \right]_x = 0 \ , \qquad (4.18)$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

4.2.3 Equação vc$K(m,n)_{\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_4\}}$

Neste caso, ao impor que a Eq. (4.6) admite a álgebra de simetria expandida pelos geradores X_i, $i = 1,2,3,4$, econtramos a classe de equações vc$K(m,n)_{\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_4\}}$, ou seja,

$$u_t + \left[\frac{c_1 x t}{m} e^{(1-m)x/2tu} u^m + \frac{c_2 t}{n} e^{(1-n)x/2tu} (u^n)_{xx} \right]_x = 0 \ . \qquad (4.19)$$

com constantes arbitrárias c_1 e c_2.

Apresentamos a seguir algumas soluções invariantes para casos particulares das novas equações vc$K(m,n)$ obtidas.

4.3 Soluções invariantes das equações vc$K(m,n)$

O método de simetrias de Lie possibilita uma maneira de se obter soluções especiais de uma equação diferencial parcial. Tais soluções são caracterizadas por sua invariância sob transformações de simetrias, e são denominadas soluções invariantes. Nesta seção apresentaremos as soluções invariantes obtidas para casos particulares da classe de equações vc$K(m,n)$ encontradas a partir de uma subálgebra da álgebra de simetria de Lie da equação KdV ordinária.

O algorítmo para a construção de soluções invariantes é dado no capítulo 3, na seção (3.5). Para efetuar a busca por soluções invariantes para a classe de equações obtidas recorremos à computação algébrica intensiva através do pacote SADE [53]. Para tal finalidade consideramos os geradores e as combinações dos geradores de simetria (4.4), além dos geradores adicionais obtidos pela escolha dos valores dos parâmetros m e n.

4.3.1 Equação vc$K(1,1)_{\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_4\}}$

Para $m = n = 1$, a Eq. (4.19) torna-se

$$u_t + c_1 tu + c_1 xtu_x + c_2 tu_{xxx} = 0 \ . \tag{4.20}$$

Apresentamos a seguir as soluções invariantes obtidas para este caso particular.

- **Simetria** $\{\mathbf{X} = c_1 x e^{\frac{3}{2}c_1 t^2}\partial x + t^{-1}e^{\frac{3}{2}c_1 t^2}\partial t - c_1 u e^{\frac{3}{2}c_1 t^2}\partial u\}$: As soluções invariantes $u = \psi(x,t)$ da Eq. (4.20), correspondentes a essa simetria, devem satisfazer à Eq. (3.105), ou seja,

$$c_1 x e^{\frac{3}{2}c_1 t^2}\frac{\partial\psi}{\partial x} + t^{-1}e^{\frac{3}{2}c_1 t^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -c_1 e^{\frac{3}{2}c_1 t^2}\psi \ . \tag{4.21}$$

Resolvendo o sistema de equações características

$$\frac{dx}{c_1 x e^{\frac{3}{2}c_1 t^2}} = \frac{dt}{t^{-1}e^{\frac{3}{2}c_1 t^2}} = \frac{du}{-c_1 u e^{\frac{3}{2}c_1 t^2}} \ ,$$

cujos invariantes são

$$w = x e^{-\frac{1}{2}c_1 t^2} \ , \quad v = u e^{\frac{1}{2}c_1 t^2} \ .$$

obtemos a solução da Eq.(4.21) pela forma invariante

$$u e^{\frac{1}{2}c_1 t^2} = \phi(x e^{-\frac{1}{2}c_1 t^2}) \ .$$

Resolvendo para u, temos

$$u = \psi(x,t) = e^{-\frac{1}{2}c_1 t^2}\phi(\varsigma) \ , \tag{4.22}$$

com $\varsigma = x e^{-\frac{1}{2}c_1 t^2}$. Levando a Eq. (4.22) na Eq. (4.20), obtemos

$$\frac{d^3\phi(\varsigma)}{d\varsigma^3} = 0 \ .$$

Finalmente, após resolver a equação diferencial ordinária acima e retornar às variáveis originais, obtemos a seguinte família de soluções invariantes sob a simetria $\{\mathbf{X}\}$ para a Eq. (4.20),

$$u(x,t) = k_1 x^2 e^{-\frac{3}{2}c_1 t^2} + k_2 x e^{-c_1 t^2} + k_3 e^{-\frac{1}{2}c_1 t^2} \ , \tag{4.23}$$

sendo $k_i, \ i = 1,2,3$ constantes arbitrárias.

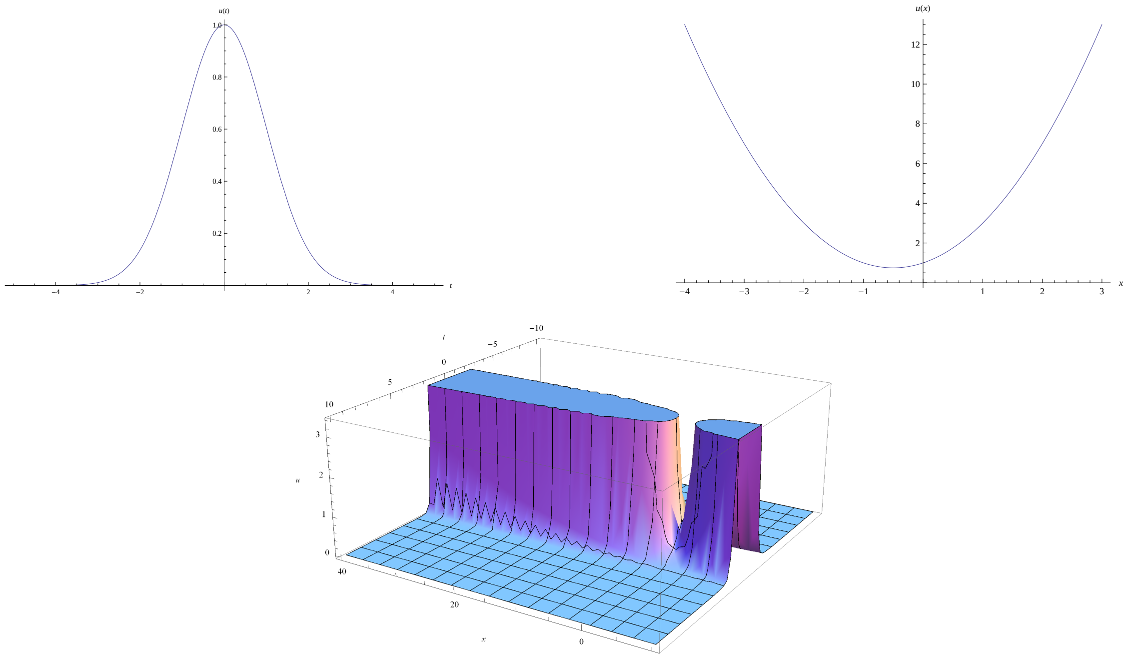

Figura 4.1: Gráficos da solução (4.23). Esquerda: $x = 0$ e $k_3 = 1$. Direita: $t = 0$ e $k_i = 1,\ i = 1, 2, 3$. Centro: $c_1 = k_i = 1,\ i = 1, 2, 3$.

- **Simetria $\{\mathbf{X_1}\}$**: A solução invariante da Eq. (4.20) neste caso é

$$\begin{aligned} u(x,t) \;&=\; 18\sqrt{c_1}c_2k_3x^{-1} + x^{1/2}\left[k_1J_n(z) - \sqrt{c_1}k_2J_n(z)\right] \\ &\quad + 3\pi\sqrt{c_1c_2}k_3\left[2\sqrt{c_2}x^{-1}\mathbf{E}_\nu(a) - \sqrt{c_1}x^{1/2}\mathbf{E}_{\nu+1}(a)\right] \\ &\quad + \sqrt{3}\pi\sqrt{c_1c_2}k_3\left[2\sqrt{c_2}x^{-1}\mathbf{J}_\nu(a) - \sqrt{c_1}x^{1/2}\mathbf{J}_{\nu+1}(a)\right]\ , \end{aligned} \tag{4.24}$$

sendo J_n, $\mathbf{E}_\nu$ e $\mathbf{J}_\nu$, $n = 1/3$ e $\nu = 2/3$, as funções de Bessel de primeira espécie, Weber e Anger[2], respectivamente; $a = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3c_1}{c_2}}$; $k_i,\ i = 1, 2, 3,$ constantes arbitrárias.

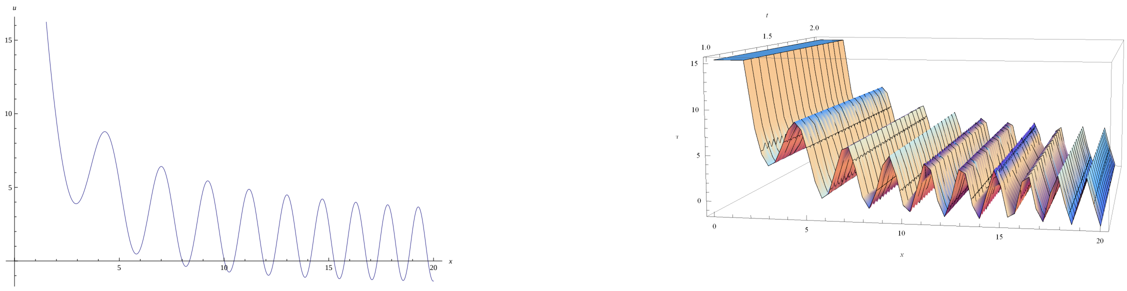

Figura 4.2: Gráficos da solução (4.24). Esquerda: $c_1 = c_2 = k_i = 1,\ i = 1, 2, 3$. Direita: $c_1 = c_2 = k_i = 1,\ i = 1, 2, 3$.

[2]Maiores detalhes sobre essas funções no Apêndice D.

4.3.2 Equação vc$K(1,1)_{\{\mathbf{X_4}\}}$

Para $m = n = 1$, a Eq. (4.17) torna-se

$$u_t + \left[c_1 t x^{-5} u + c_2 t x^{-3} u_{xx}\right]_x = 0 \; . \tag{4.25}$$

As soluções invariantes encontradas para a Eq. (4.25) estão listadas a seguir.

- **Simetria $\{\mathbf{X_2}\}$**: A solução invariante neste caso é

$$u(x,t) = k_1 x^5 + k_2 x^a + k_3 x^{1-a} \; , \tag{4.26}$$

com $a = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{c_2 - 4c_1}{c_2}}\right)$ e k_i, $i = 1,2,3$, constantes arbitrárias.

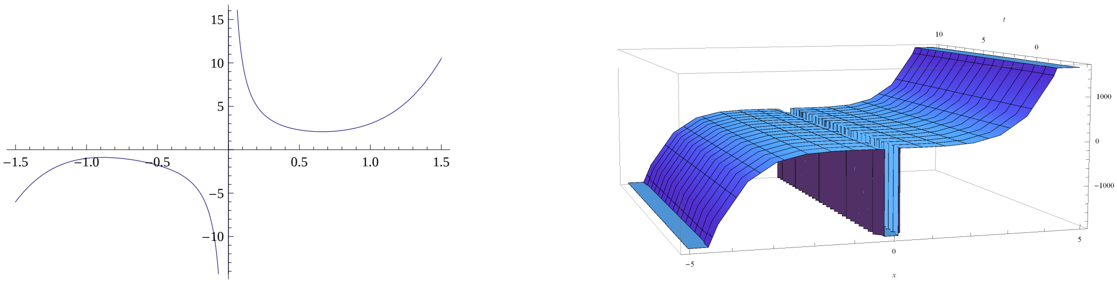

Figura 4.3: Gráficos da solução (4.26). Esquerda: $k_i = 1$, $i = 1,2,3$, $c_1 = -2c_2$ e $a = 2$. Direita: $k_i = 1$, $i = 1,2,3$, $c_1 = -2c_2$ e $a = 2$

- **Simetria $\{\mathbf{X}_4\}$**: Para esta simetria, a solução invariante obtida foi

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & k_1 t^{-7/3} x^5 \left({}_1F_2\left[\tfrac{5}{6}; \tfrac{c+10}{6}, \tfrac{11-c}{6}; \tfrac{x^2}{108 c_2 t^2}\right]\right) \\ & + k_2 t^{\frac{-c-2}{3}} x^c \left({}_1F_2\left[\tfrac{c+2}{6}; \tfrac{2c+5}{6}, \tfrac{c+1}{6}; \tfrac{x^2}{108 c_2 t^2}\right]\right) \\ & + k_3 t^{\frac{c-3}{3}} x^{1-c} \left({}_1F_2\left[\tfrac{c+3}{6}; \tfrac{-2c+7}{6}, \tfrac{-c+2}{6}; \tfrac{x^2}{108 c_2 t^2}\right]\right) \; , \end{aligned} \tag{4.27}$$

em que ${}_pF_q[a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z]$ representam as séries hipergeométricas generalizadas[3]; $c = 1/2\left(1 - \sqrt{\frac{c_2 - 4c_1}{c_2}}\right)$; k_i, $i = 1,2,3$, constantes arbitrárias.

4.3.3 Equação vc$K(2,2)_{\{\mathbf{X_4}\}}$

Para $m = n = 2$, a forma resultante da Eq. (4.17) é

$$u_t + \left[\frac{c_1 t}{2} x^{-3} u^2 + \frac{c_2 t}{2} x^{-1} (u^2)_{xx}\right]_x = 0 \; . \tag{4.28}$$

[3]Maiores detalhes sobre essa função no Apêndice D.

Para a Eq. (4.28) obtivemos as seguintes soluções invariantes.

- **Simetria** $\{\mathbf{X}_2\}$ Considerando esta simetria, a solução invariante encontrada foi

$$u(x,t) = \left[\alpha\left(k_3 x^a + k_2 x^{1-a}\right) - 5\tfrac{\alpha}{\beta}\left(k_3 x^a - k_2 x^{1-a}\right) - 2k_1 \alpha x^3\right]^{1/2}, \qquad (4.29)$$

em que $a = \frac{1}{2}(1+\beta)$, $\alpha = \frac{c_2}{6c_2+c_1}$, $\beta = \sqrt{\frac{c_2-4c_1}{c_2}}$ e k_i, $\;i = 1,2,3$, são constantes arbitrárias.

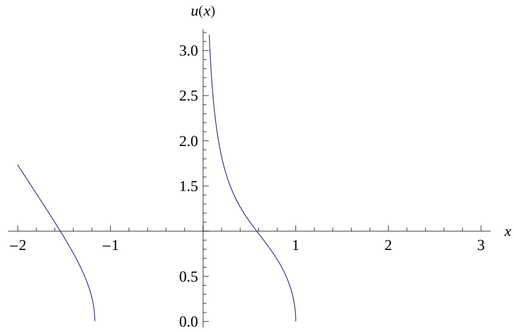

Figura 4.4: Gráfico da solução (4.29), com $k_i = 1$, $i = 1,2,3$, $c_1 = -2c_2$, $a = 2$, $\alpha = 1/4$ e $\beta = 3$.

- **Simetria** $\{\mathbf{X} = x\partial_x + 4u\partial_u\}$ A solução invariante sob essa simetria é

$$u(x,t) = \frac{4x^4}{5(c_1+56c_2)t^2+4k_1}, \qquad (4.30)$$

em que k_1 é uma constante arbitrária.

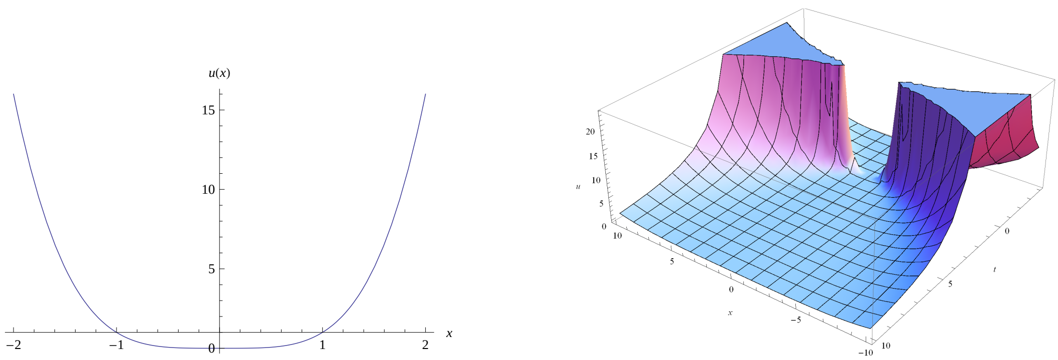

Figura 4.5: Gráficos da solução (4.30). Esquerda: $t = 0$ e $c_1 = c_2 = k_1 = 1$. Direita: $c_1 = c_2 = k_1 = 1$.

4.3.4 Equação vc$K(3,3)_{\{\mathbf{X_4}\}}$

Para o caso $m = n = 3$ temos a equação

$$u_t + \left[\frac{c_1 t}{3} x^{-1} u^3 + \frac{c_2 t}{3} x (u^3)_{xx}\right]_x = 0\ , \tag{4.31}$$

cujas soluções invariantes encontradas são

- **Simetria** $\{\mathbf{X}_2\}$: a solução invariante sob esta simetria é

$$u(x,t) = \left[\gamma\left(k_3 x^a + k_2 x^{1-a}\right) - 3\frac{\gamma}{\beta}\left(k_3 x^a - k_2 x^{1-a}\right) - 2k_1 \gamma x\right]^{1/3}\ , \tag{4.32}$$

  onde $a = \frac{1}{2}(1+\beta)$, $\gamma = \frac{3c_2}{2c_1}$, $\beta = \sqrt{\frac{4c_1 - c_2}{c_2}}$ e $k_i,\ \imath = 1, 2, 3$, constantes arbitrárias.

- **Simetria** $\{\mathbf{X} = x\partial x + u\partial u\}$ Para este gerador a solução obtida foi

$$u(x,t) = \pm \frac{3x}{\sqrt{(6c_1 + 36c_2)t^2 + 9k_{;1}}}\ , \tag{4.33}$$

  sendo k_1 uma constante arbitrária.

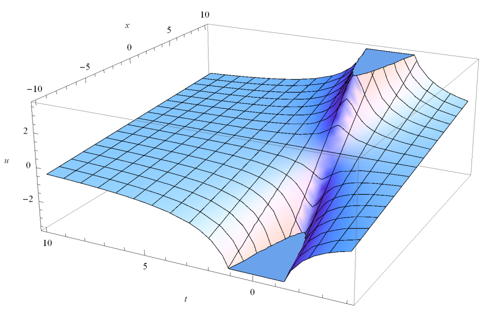

Figura 4.6: Gráfico da solução (4.33), com $c_1 = c_2 = k_1 = 1$.

4.3.5 Equações vc$K(4,2)_{\{\mathbf{X_4}\}}$ e vc$K(4,3)_{\{\mathbf{X_4}\}}$

Quando $m = 4, n = 2, 3$ temos, respectivamente, as EDPs

$$u_t + \left[\tfrac{c_1 t}{4} x u^4 + \tfrac{c_2 t}{2} x^{-1}(u^2)_{xx}\right]_x \;=\; 0\ , \tag{4.34}$$

$$u_t + \left[\tfrac{c_1 t}{4} x u^4 + \tfrac{c_2 t}{3} x(u^3)_{xx}\right]_x \;=\; 0\ . \tag{4.35}$$

- **Simetria** $\{\mathbf{X_1}\}$ A solução invariante obtida foiambas têm a mesma solução invariante, que é

$$u(x,t) = \frac{2}{(3c_1 t^2 + 8k_1)^{1/3}}\ , \tag{4.36}$$

sendo k_1 uma constante arbitrária.

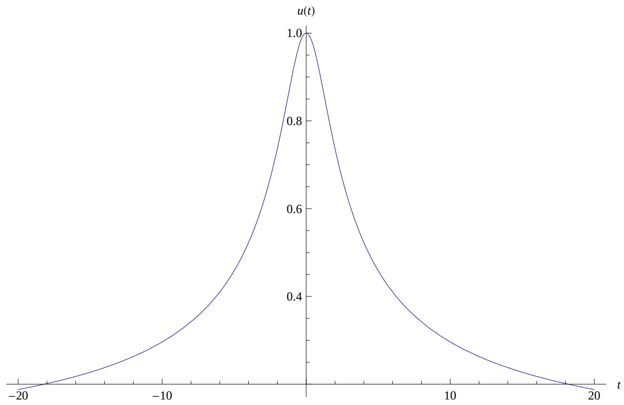

Figura 4.7: Gráfico da solução (4.36), com $c_1 = k_1 = 1$.

Capítulo 5

Leis de conservação

Apresentaremos nesse capítulo a aplicação das simetrias na construção de leis de conservação para equações diferenciais. Falaremos sobre o teorema de Noether, que possibilita obter leis de conservação para equações que possuem uma Lagrangeana. Também iremos discorrer sobre um novo método de construir leis de conservação para equações diferencias arbitrárias, que não requer a existência de Lagrangeanas para tais equações. Em seguida, utlizando o novo método, mostraremos as leis de conservação construídas para alguns casos particulares das equações vc$K(m,n)$.

5.1 Teoremas de conservação

A lei de conservação de um sistema físico [35, 50], com variáveis independentes $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ e variáveis dependentes $u = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$, é uma equação da forma

$$divC \equiv D_i C^i = 0 \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \ , \tag{5.1}$$

em que C^i, denominado *vetor conservado*, depende de x, u e das derivadas u_i; D_i são os operadores de derivação total. Como exemplo, para sistemas decorrentes da mecânica clássica, em que o tempo é a única variável independente, a lei de conservação é $D_t C^1 = 0$, e então C^1 torna-se uma constante de movimento que pode ser utilizada para reduzir o número de graus de liberdade do sistema.

Contudo, obter leis de conservação de um dado sistema é geralmente uma tarefa árdua. Porém, Amalie Emmy Noether, umas das importantes matemáticas de sua época, fazendo grandes contribuições no campo da álgebra e da topologia, desenvolveu um teorema fundamental para sistemas decorrente de uma formulação Lagrangeana [41], sendo hoje aplicado, por exemplo, no eletromagnetismo. Ela provou que cada transformação infinitesimal admitida por uma integral de ação de um sistema Lagrangeano pode ser usado para encontrar uma lei de conservação, cujas transformações são obtidas estudando as equações de Euler-Lagrange (equações diferencias obtidas de um problema variacional de uma integral de ação).

As transformações infinitesimais consideradas por Noether são da forma

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon\theta(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) + O(\varepsilon^2) \\ u^* &= u + \varepsilon\eta(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) + O(\varepsilon^2) \ , \end{aligned} \tag{5.2}$$

em que $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ corresponde às n variáveis independentes e $u = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$ às m variáveis dependentes. As derivadas de u em relação a x são dadas por

$$\partial^k u = \frac{\partial^\nu u}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \ldots \partial x^{i_n}} \ , \tag{5.3}$$

em que $i_n = 1, 2, \ldots, n$ para $\nu = 1, 2, \ldots, k$. Nas transformações da Eq. (5.2), os infinitesimais θ e η dependem, além de x e u, das derivadas de u. Essas transformações são chamadas de transformações de Lie-Bäcklund [85], que podem ser encontradas fazendo a extensão do método de Lie para obter as simetrias de ponto infinitesimais.

5.2 Teorema de Noether

O teorema de Noether [35, 41] estabelece a relação entre simetrias e leis de conservação para um problema variacional e traz um procedimento para a construção de leis de conservação para as equações de Euler-Lagrange com simetrias conhecidas. Assim, para estabelecer o teorema primeiro devemos obter as equações de Euler-Lagrange. Para isso, partimos do seguinte problema variacional: dada uma função $\mathcal{L}(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ definida em um domínio M do espaço $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, encontramos funções $u(x)$ que correspondem ao extremo da integral

$$J[u] = \int_M \mathcal{L}(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^n u) dx \ . \tag{5.4}$$

A função $\mathcal{L}$ é chamada Lagrangeana, e $J[u]$ é a integral de ação (ou integral variacional). Se $u(x)$ for um extremo de $J[u]$, então uma transformação infinitesimal como

$$u(x) \to u(x) + \varepsilon v(x) \ ,$$

que não altera as condições de contorno ∂M do domínio M, também não altera $J[u]$. Portanto, considerando a variação de $u(x)$, o extremo de $u(x)$ satisfaz à equação

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u^\nu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu} - D_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i^\nu} + D_iD_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\nu} + \dots \\ &\quad + (-1)^k D_{i_1}D_{i_2}\cdots D_{i_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1 i_2\dots i_k}} = 0\ ,\quad \nu = 1,2,\dots,m\ . \end{aligned} \tag{5.5}$$

Essas equações são as chamadas *equações de Euler-Lagrange*, em que

$$\frac{\delta}{\delta u^\nu} = \frac{\partial}{\partial u^\nu} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_{i_1}\cdots D_{i_s}\frac{\partial}{\partial u^\nu_{i_1 i_2\cdots i_s}}\ , \tag{5.6}$$

com $\nu = 1,2,\dots,m$ e $i_1\dots i_s = 1\dots n$, é o *operador de Euler-Lagrange* (assumimos a somatória sobre os índices repetidos $i_1\dots i_n$). Podemos agora enunciar o seguinte teorema.

Teorema 5.2.0.1. *Para que uma função $u(x)$ seja um extremo da integral de ação, Eq. (5.4), é necessário que ela satisfaça às equações de Euler-Lagrange, Eq. (5.5).*

Portanto, o teorema de Noether faz a seguinte afirmação:

Teorema 5.2.0.2. *Se a integral variacional, Eq. (5.4), for invariante sob as transformações Eq. (5.2), cujo gerador é*

$$\mathrm{X} = \theta_i(x,u,u_{i_1},\dots)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\nu(x,u,u_{i_1},\dots)\frac{\partial}{\partial u^\nu}\ , \tag{5.7}$$

então o vetor de campo $C = (C^1, C^2, \dots, C^n)$, definido por

$$C^i = \mathcal{N}^i\mathcal{L},\quad i = 1,\dots,n\ , \tag{5.8}$$

em que

$$\mathcal{N}^i = \theta_i + W^\nu\frac{\delta}{\delta u_i^\nu} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1}\cdots D_{i_s}(W^\nu)\frac{\delta}{\delta u^\nu_{ii_1\cdots i_s}}\ , \tag{5.9}$$

e

$$W^\nu = \eta^\nu - \theta_j u_j^\nu,\quad \nu = 1,\dots,m\ , \tag{5.10}$$

fornece uma lei de conservação para as equações de Euler-Lagrange, Eq. (5.5), isto é, para todas as soluções das Eqs. (5.5),

$$D_i(C^i) = 0\ . \tag{5.11}$$

Os geradores de simetria definidos na Eq. (5.7) devem satisfazer à seguinte condição de invariância

$$\mathrm{X}(\mathcal{L}) + \mathcal{L}D_i(\theta_i) = 0\ , \tag{5.12}$$

em que já consideramos o prolongamento do gerador. Neste caso, a Eq. (5.12) é chamada de *simetria variacional*.

Pode-se adicionar à Lagrangeana $\mathcal{L}$ a divergência de um campo vetorial arbitrário $B^i = B^i(x, t, u, \partial u, \ldots, \partial^l u)$, $1 \leq i \leq n$, $l \in \mathcal{N}$, e substituir a condição de invariância definida na Eq. (5.12) por uma condição de divergência como

$$\mathrm{X}(\mathcal{L}) + \mathcal{L} D_i(\theta_i) = D_i(B^i) \; . \tag{5.13}$$

Então, as Eqs. (5.5) continuam invariantes e têm uma lei de conservação $D_i C^i = 0$, com C^i dado por

$$C^i = \mathcal{N}^i(\mathcal{L}) - B^i \; .$$

Logo, se gerador X satisfaz à condição de divergência da Eq. (5.13), então o operador X é uma *simetria de divergência*, também denominado *simetria de Noether*.

5.3 Teorema de Ibragimov

Na seção anterior vimos que o teorema de Noether [41, 86] estabelece uma relação entre as simetrias de uma equação diferencial obtida de um princípio variacional (equações de Euler-Lagrange) e as leis de conservação.

Contudo, a aplicabilidade do teorema de Noether está sujeita a várias limitações, pois Lagrangeanas existem somente para tipos especiais de equações diferenciais. Por exemplo, para equações de evolução e para equações diferencias de ordem ímpar, o teorema de Noether não pode ser aplicado. Também deve-se considerar a tarefa não-trivial de encontrar simetrias variacionais, já que o primeiro passo consiste em determinar todas as simetrias locais admitidas pelas equações de Euler-Lagrange para, em seguida, verificar se cada simetria satisfaz à condição imposta pela Eq. (5.12), que deixa invariante a integral variacional, Eq. (5.4) [87].

Porém, em trabalho recente, Nail H. Ibragimov [42] apresentou um algorítmo para construir leis de conservação associadas a cada simetria infinitesimal de uma equação diferencial arbitrária. Este novo método é baseado na concepção de equações adjuntas para equações diferencias não-lineares, e não requer a existência de Lagrangeanas. Neste método define-se uma equação adjunta para a equação diferencial e constroe-se uma Lagrangeana para a equação diferencial considerada em conjunto com a equação adjunta. O teorema de conservação de Ibragimov também é válido para qualquer sistema de equações diferenciais em que o número de equações é igual ao número de variáveis dependentes, e é considerado um teorema de *leis de conservação não-locais*.

Assim, nesta seção são apresentadas as definições e teoremas relativos ao teorema de conservação de Ibragimov, bem como a aplicação do algorítmo deste métodona construção de leis de conservação para as classes de equações vc$K(m,n)$ obtidas [40].

Operadores básicos e a identidade fundamental

Sejam θ_i e η^ν funções diferenciais que dependam das variáveis $x, u, u_{i_1}, \ldots$. Chamamos de *operador de Lie-Bäcklund* [35, 85] o operador diferencial

$$\mathrm{X} = \theta_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu} + \zeta_i^\nu \frac{\partial}{\partial u_i^\nu} + \zeta_{i_1 i_2}^\nu \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}^\nu} + \ldots \,, \tag{5.14}$$

em que

$$\begin{aligned} \zeta_i^\nu &= D_i(\eta^\nu - \theta_j u_j^\nu) + \theta_j u_{ij}^\nu, \\ \zeta_{i_1 i_2}^\nu &= D_{i_1} D_{i_2}(\eta^\nu - \theta_j u_j^\nu) + \theta_j u_{j i_1 i_2}^\nu \,, \end{aligned} \tag{5.15}$$

e

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu} + u_{ij}^\nu \frac{\partial}{\partial u_j^\nu} + \ldots \tag{5.16}$$

é o operador de diferenciação total em relação a x^i.

Os operadores de Lie-Backlund, Eq. (5.14), estão associados aos operadores $\mathcal{N}^i (i = 1, \ldots, n)$, definidos por

$$\mathcal{N}^i = \theta_i + W^\nu \frac{\delta}{\delta u_i^\nu} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \cdots D_{i_s}(W^\nu) \frac{\delta}{\delta u_{i i_1 \cdots i_s}^\nu} \,, \tag{5.17}$$

em que W^ν é dado pela Eq. (5.10). As derivadas variacionais em relação às variáveis $u_i^\nu, \ldots$ são obtidas da Eq. (5.6) substituindo u^ν pelas derivadas correspondentes $u_i^\nu, \ldots$. Assim,

$$\frac{\delta}{\delta u_i^\nu} = \frac{\partial}{\partial u_i^\nu} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{j_1} \cdots D_{j_s} \frac{\partial}{\partial u_{i j_1 j_2 \cdots j_s}^\nu} \,. \tag{5.18}$$

Teorema 5.3.0.3. *Os operadores Eq. (5.6), Eq. (5.14) e Eq. (5.17) estão conectados pela identidade fundamental*

$$\mathrm{X} + D_i(\theta_i) = W^\nu \frac{\delta}{\delta u^\nu} + D_i \mathcal{N}^i \,, \tag{5.19}$$

em que W^ν é dado pela Eq. (5.10).

Equações adjuntas

Definição 5.3.0.1. *Considere um sistema de equações diferenciais parciais de s-ésima ordem*

$$F_\nu(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m\ , \tag{5.20}$$

em que $F_\nu(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u)$ representa as equações diferenciais com n variáveis independentes, $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, e m variáveis dependentes, $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$, sendo $u = u(x)$. O sistema de equações adjuntas para as Eqs. (5.20) é definido por

$$F^*_\nu(x, u, v, \partial u, \partial v, \dots, \partial^s u, \partial^s v) \equiv \frac{\delta(v^\beta F_\beta)}{\delta u^\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, m\ , \tag{5.21}$$

sendo $v = (v^1, \dots, v^m)$ as novas variáveis dependentes, $v = v(x)$, e $\frac{\delta}{\delta u^\nu}$ o operador de Euler-Lagrange.

Definição 5.3.0.2. *Um sistema de equações como o da Eq. (5.20) é dito ser auto-adjunto se sistema de equações adjuntas da Eq. (5.21), após a substituição $v = u$,*

$$F^*_\nu(x, u, u, \partial u, \partial u, \dots, \partial^s u, \partial^s u) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m\ , \tag{5.22}$$

for idêntico ao sistema original, Eq. (5.20). Portanto, as equações auto-adjuntas obedecem à condição

$$F^*_\nu(x, u, u, \partial u, \partial u, \dots, \partial^s u, \partial^s u) = \phi^\beta_\nu F^\nu(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u), \ \nu = 1, \dots, m\ , \tag{5.23}$$

com coeficientes regulares ϕ^β_ν.

Exemplo. Considere a equação de calor não-linear

$$F = u_t - [k(u)u_x]_x = 0\ . \tag{5.24}$$

A equação acima aparece em problemas não-lineares de calor e transferência de massa e fluxo em meios porosos [39, 48]. A equação adjunta, Eq. (5.21), para a Eq. (5.24) é dada por

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\delta}{\delta u}\left(v[u_t - K u_{xx} - k_u u_x^2]\right) \\ &= -D_t(v) - k_u v u_{xx} - k_{uu} v u_x^2 - D_x^2(kv) + 2D_x(k_u v u_x)\ , \end{aligned} \tag{5.25}$$

em que D_t e D_x são dados pela Eq. (5.16). Temos então que

$$-D_x^2(kv) + 2D_x(k_u v u_x) - D_t(v) = -D_x(kv_x) + D_x(k_u v u_x) - v_t\ . \tag{5.26}$$

Após substituir a Eq. (5.26) na Eq. (5.25) e fazer algumas simplicações, chegamos à equação adjunta para a equação de calor não-linear da Eq. (5.24),

$$v_t + k(u)v_{xx} = 0 \ .$$

Lagrangeanas

Teorema 5.3.0.4. *Qualquer sistema de equações diferenciais como o especificado pela Eq.* (*5.20*)*, em conjunto com sua equação adjunta, Eq.* (*5.21*)*, possui uma Lagrangeana, ou seja, o sistema dado pelas Eqs.* (*5.20*)-(*5.21*) *com* $2m$ *variáveis dependentes,* $u = (u^1, \ldots, u^m)$ *e* $v = (v^1, \ldots, v^m)$*, é um sistema de equações de Euler-Lagrange, Eq.* (*5.5*)*, cuja Lagrangeana* $\mathcal{L}$ *é*

$$\mathcal{L} = v^\beta F_\beta(x, u, \ldots, \partial^n u) \ . \tag{5.27}$$

Simetrias das equações adjuntas

Vamos agora enunciar o teorema em que todas as simetrias de Lie e de Lie-Bäcklund das Eqs. (5.20) são herdadas pelas equações adjuntas, Eq. (5.21).

Teorema 5.3.0.5. *Considere um sistema de* m *equações*

$$F_\nu(x, u, \partial u, \ldots, \partial^s u) = 0, \ \nu = 1, \ldots, m \ . \tag{5.28}$$

A equação adjunta

$$F^*_\nu(x, u, v, \partial u, \partial v, \ldots, \partial^s u, \partial^s v) \equiv \frac{\delta(v^\beta F_\beta)}{\delta u^\nu} = 0 \ , \ \nu = 1, \ldots, m \ , \tag{5.29}$$

herda as simetrias da Eq. (*5.28*)*, ou seja, se o sistema representado pela Eq.* (*5.28*) *admite um operador como*

$$\mathrm{X} = \theta_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu} \ , \tag{5.30}$$

então o sistema adjunto Eq. (*5.29*) *admite o operador da Eq.* (*5.30*) *prolongado para as variáveis* v^ν*,*

$$\mathrm{X}^\dagger = \theta_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu} + \eta^\nu_* \frac{\partial}{\partial v^\nu} \ , \tag{5.31}$$

com uma certa função $\eta^\nu_* = \eta^\nu_*(x, u, v, \ldots)$*.*

Para o caso de uma equação F_ν com n variáveis independentes, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, e uma variável dependente, u, sendo o operador da Eq. (5.31) uma simetria pontual de Lie da Eq. (5.29), então

$$\eta_* = -\left[\lambda + D_i(\theta_i)\right] v \ ,$$

em que a Eq. (5.31) satisfaz à condição imposta pela Eq. (5.12), e $\lambda = \lambda(x, u, \ldots)$ é tal que seguinte igualdade

$$\mathrm{X}(F) = \lambda F. \tag{5.32}$$

Se assumirmos que o operador adjunto dado pela Eq. (5.31) é um operador de Lie-Bäcklund, a Eq. (5.32) torna-se

$$\mathrm{X}(F) = \lambda_0 F + \lambda_1^i D_i(F) + \lambda_2^{ij} D_i D_j(F) + \lambda_3^{ijk} D_i D_j D_k(F) + \ldots \ , \tag{5.33}$$

com $\lambda_2^{ij} = \lambda_2^{ji}, \ldots$. Portanto, é necessário que

$$\eta_* = -\left[\lambda_0 + D_i(\theta_i)\right] v + D_i(v\lambda_1^i) - D_i D_j(v\lambda_2^{ij} + D_i D_j D_k(v\lambda_3^{ijk}) - \ldots \ ,$$

cujo operador adjunto, Eq. (5.31), deve satisfazer à condição descrita pela Eq. (5.13) com

$$B^i = -v\lambda_1^i - v\lambda_2^{ij} D_i(F) + F D_j(v\lambda_2^{ij}) - \ldots \ .$$

Teorema das leis de conservação não-locais

Teorema 5.3.0.6. [1] *Cada simetria pontual de Lie and Lie-Bäcklund,*

$$\mathrm{X} = \theta_i(x, u, \partial u, \ldots)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\nu(x, u, \partial u, \ldots)\frac{\partial}{\partial u^\nu} \ , \tag{5.34}$$

das equações diferenciais

$$F_\nu(x, u, \partial u, \ldots, \partial^n u) = 0, \ \nu = 1, \ldots, m \ , \tag{5.35}$$

fornece uma lei de conservação não-local para as Eqs. (*5.35*)*. O vetor conservado correspondente envolve as variáveis adjuntas v dadas pelas Eqs.* (*5.29*)*, e então as leis de conservação resultantes são, geralmente, não-locais.*

Exemplo. Considere a equação de lubrificação

$$u_t + \frac{a}{u} u_{xxxx} = 0 \ . \tag{5.36}$$

[1] A demostração deste teorema encontra-se no Apêndice C.

A equação adjunta da Eq. (5.36) é

$$-v_t - \frac{a}{u}u_{xxxx} = 0 \ .$$

De acordo com o Teorema (5.3.0.4), a Eq. (5.36), juntamente com sua equação adjunta, possui uma Lagrangeana dada por

$$\mathcal{L} = v\left(u_t + \frac{a}{u}u_{xxxx}\right) \ . \tag{5.37}$$

Vamos aplicar o Teorema (5.3.0.6) para encontrar a lei de conservação fornecida pelo gerador de simetria

$$\mathrm{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + 4t\frac{\partial}{\partial t} \ .$$

Para uma Lagrangeana de quarta ordem, o vetor conservado, Eq. (5.8), é

$$\begin{aligned} C^i &= \theta_i\mathcal{L} + W\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - D_j\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}}\right) + D_jD_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right) - D_jD_kD_l\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijkl}}\right)\right] \\ &+ D_j(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}} - D_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right) + D_kD_l\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijkl}}\right)\right] \\ &+ D_jD_k(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}} - D_l\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijkl}}\right)\right] + D_jD_kD_l(W)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijkl}} \ , \end{aligned} \tag{5.38}$$

em que $W = \eta - \theta_j u_j$. Denotando $x^1 = x$ e $x^2 = t$, temos

$$\theta_1 = x, \quad \theta_2 = 4t \ , \quad W = -xu_x - 4tu_t \ .$$

A lei de conservação dada pela Eq. (5.11) pode ser escrita como

$$D_x(C^1) + D_t(C^2) = 0 \ , \tag{5.39}$$

com C^1 e C^2 definidos pela Eq. (5.38). Substituindo θ_1, θ_2 e w no vetor conservado, Eq. (5.38), encontramos a lei de conservação da Eq. (5.39) com componentes

$$\begin{aligned} C^1 &= x\mathcal{L} - WD_x^3\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}}\right) + D_x(W)\left[D_x^2\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}}\right)\right] \\ &+ D_x^2(W)\left[-D_x\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}}\right)\right] + D_x^3(W)\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}}\right) \\ &= xv\left(u_t + \frac{a}{u}u_{xxxx}\right) + (4tu_t + xu_x)D_x^3\left(\frac{av}{u}\right) + D_x(-4tu_t - xu_x)D_x^2\left(\frac{av}{u}\right) \\ &- D_x^2(-4tu_t - xu_x)D_x\left(\frac{av}{u}\right) + D_x^3(-4tu_t - xu_x)\left(\frac{av}{u}\right) \ , \end{aligned} \tag{5.40}$$

e

$$C^2 = 4t\mathcal{L} + Wv = 4atv\frac{u_{xxxx}}{u} - vxu_x. \tag{5.41}$$

Pela Definição (5.3.0.2), a Eq. (5.36) é auto-adjunta e, portando, podemos tomar $v = u$ nas componentes C^1 e C^2. Então, fixando $v = u$ e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} C^1 &= D_t\left(\frac{xu^2}{2}\right) - D_t(4atu_{xxx}) + au_{xxx} \ , & (5.42)\\ C^2 &= 4aD_x(tu_{xxx}) - D_x\left(\frac{xu^2}{2}\right) + \frac{u^2}{2} \ . & (5.43)\end{aligned}$$

Levando os termos $4aD_x(tu_{xxx})$ e $-D_x\left(\frac{xu^2}{2}\right)$ de C^2 para C^1, na forma $D_t(4atu_{xxx})$ e $-D_t\left(\frac{xu^2}{2}\right)$, respectivamente, obtemos a lei de conservação da Eq. (5.39) para a Eq. (5.36), com componentes dadas por

$$C^1 = au_{xxx}, \quad C^2 = \frac{u^2}{2} \ . \tag{5.44}$$

5.4 Leis de conservação das equações vc$K(m,n)$

Agora aplicaremos o método de construção de leis de conservação de Ibragimov para as classes de equações vc$K(m,n)$ que encontramos [40]. No Capítulo 4, vimos que as equações (4.17) e (4.19), dadas por

$$\begin{aligned} u_t + \left[\frac{c_1 t}{m}x^{2m-7}u^m + \frac{c_2 t}{n}x^{2n-5}(u^n)_{xx}\right]_x &= 0 \ ,\\ u_t + \left[\frac{c_1 xt}{m}e^{(1-m)x/2tu}u^m + \frac{c_2 t}{n}e^{(1-n)x/2tu}(u^n)_{xx}\right]_x &= 0 \ ,\end{aligned}$$

respectivamente, correspondem às classes vc$K(m,n)_{\{\mathbf{X}_4\}}$ e vc$K(m,n)_{\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_4\}}$. Apresentamos a seguir os resultados obtidos para casos particulares dessas classes.

5.4.1 Equação vc$K(1,1)_{\{\mathbf{X}_4\}}$

Para $m = n = 1$, a Eq. (4.17) é dada pela Eq. (4.25), a saber,

$$u_t + c_1 t\left[x^{-5}u\right]_x + c_2 t\left[x^{-3}u_{xx}\right]_x = 0 \ .$$

A Eq. (4.25), em conjunto com sua equação adjunta

$$v_t + \frac{(c_1+12c_2)t}{x^5}v_x - \frac{6c_2t}{x^4}v_{xx} + \frac{c_2t}{x^3}v_{xxx} = 0\ , \tag{5.45}$$

possui uma Lagrangeana fornecida pela equação Eq. (5.27) dada por

$$\mathcal{L} = \left[u_t + c_1t\left(x^{-5}u\right)_x + c_2t\left(x^{-3}u_{xx}\right)_x\right]v\ . \tag{5.46}$$

Vamos encontrar a lei de conservação da Eq. (4.25) para a seguinte simetria pontual

$$\mathrm{X} = x\partial_x + 3t\partial_t\ . \tag{5.47}$$

Sendo $x^1 = x$ e $x^2 = t$ e, comparando o operador da Eq. (5.47) com a simetria da Eq. (5.34), vemos que $\theta_1 = x$, $\theta_2 = 3t$ e $\eta = 0$. Logo,

$$W = \eta - \theta_j u_j = -xu_x - 3tu_t\ .$$

Como a Lagrangeana é de terceira ordem, o vetor conservado dado pela Eq. (5.8) é tal que

$$\begin{aligned} C^i = {} & \theta_i\mathcal{L} + W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} - D_j\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}}\right) + D_jD_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right)\right] \\ & + D_j(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}} - D_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right)\right] \\ & + D_jD_k(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right]\ . \end{aligned} \tag{5.48}$$

Assim, temos a lei de conservação $D_x(C^1) + D_t(C^2) = 0$ dada pela simetria da Eq. (5.47), cujas componentes C^1 e C^2 são calculados com a Eq. (5.48). Portanto,

$$\begin{aligned} C^1 = {} & \theta_1\mathcal{L} + W\left[\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} - D_x\left(\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\right) + D_x^2\left(\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}\right)\right] \\ & + D_x(W)\left[\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - D_x\left(\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}\right)\right] \\ & + D_x^2(W)\left[\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}\right] \\ C^1 = {} & x\mathcal{L} - (xu_x - 3tu_t)\left[\tfrac{c_1t}{x^5}v - D_x\left(\tfrac{-3c_2t}{x^4}v\right) + D_x^2\left(\tfrac{c_2t}{x^3}\right)\right] \\ & - D_x(xu_x + 3tu_t)\left[\tfrac{-3c_2t}{x^4}v - D_x\left(\tfrac{c_2t}{x^3}v\right)\right] \\ & - D_x^2(xu_x + 3tu_t)\left[\tfrac{c_2t}{x^3}v\right]\ , \end{aligned} \tag{5.49}$$

e

$$
\begin{aligned}
C^2 &= \theta_2\mathcal{L} + W\left[\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\right] , \\
C^2 &= 3t\mathcal{L} + Wv \; .
\end{aligned}
\tag{5.50}
$$

Efetuando as operações matemáticas e simplificando, temos

$$
\begin{aligned}
C^1 = &\left[-\tfrac{3c_2t^2}{x^3}u_{txx} - \tfrac{5c_2t}{x^3}u_{xx} + \tfrac{x^6-3c_1t^2}{x^5}u_t - \tfrac{5c_1t}{x^5}u\right]v \\
&+ \left[\tfrac{c_2t}{x^2}u_{xx} + \tfrac{3c_2t^2}{x^3}u_{tx} + \tfrac{4c_2t}{x^3}u_x + \tfrac{9c_2t^2}{x^4}u_t\right]v_x - \left[\tfrac{5c_2t^2}{x^3}u_t - \tfrac{c_2t}{x^2}u_x\right]v_{xx} ,
\end{aligned}
\tag{5.51}
$$

$$
C^2 = \left[\left(\tfrac{3c_2t}{x^3}u_{xx}\right)_x + \left(\tfrac{3c_1t^2}{x^5}u\right)_x - xu_x\right]v \; . \tag{5.52}
$$

Podemos substituir nas Eqs. (5.51)-(5.52) qualquer solução $v = v(x,t)$ da Eq. (5.45). Tomemos, por exemplo, a solução

$$
v(x,t) = k \; , \tag{5.53}
$$

em que k é uma constante arbitrária. Substituindo essa solução nas componentes C^1 e C^2, Eqs. (5.51)-(5.52), e simplificando, vemos que a lei de conservação terá componentes dadas por

$$
C^1 = \frac{kc_2t}{x^3}u_{xx} + \frac{kc_1t}{x^5}u \; , \tag{5.54}
$$

$$
C^2 = ku \; . \tag{5.55}
$$

5.4.2 Equação vc$K(2,2)_{\{\mathbf{X}_4\}}$

Para $m = n = 2$ a Eq. (4.17) assume a forma da Eq. (4.28), ou seja,

$$
u_t + \left[\frac{c_1t}{2}x^{-3}u^2 + \frac{c_2t}{2}x^{-1}(u^2)_{xx}\right]_x = 0 \; .
$$

A equação adjunta da Eq. (4.28) é

$$
v_t + \frac{(c_1+2c_2)t}{x^3}uv_x - \frac{2c_2t}{x^2}uv_{xx} + \frac{c_2t}{x}uv_{xxx} = 0 \; ,
$$

com a Lagrangeana igual a

$$
\mathcal{L} = \left[u_t + \frac{c_1t}{2}\left(x^{-3}u^2\right)_x + \frac{c_2t}{2}\left(x^{-1}(u^2)_{xx}\right)_x\right]v \; .
$$

Consideremos a seguinte simetria

$$\mathrm{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + 4u\frac{\partial}{\partial u} \ . \tag{5.56}$$

Para este caso, temos

$$\theta_1 = x \ , \quad \eta = 4u, \quad W = 4u - xu_x \ . \tag{5.57}$$

Efetuando o procedimento feito anteriormente, encontramos a lei de conservação correspondente à simetria da Eq. (5.56), cujas componentes, definidas pela equação Eq. (5.48), são

$$\begin{aligned} C^1 = & \left[\frac{3c_2t^2}{x}uu_{xx} + \frac{5c_2t}{x}u_x^2 - \frac{6c_2t}{x}uu_x + \frac{5c_1t}{2x^3}u^2 + xu_t\right]v \\ & + \left[c_2tuu_{xx} + c_2tu_x^2 - \frac{4c_2t}{x^2}u^2\right]v_x - \left[c_2tuu_x - \frac{4c_2t}{x}u^2\right]v_{xx} \ , \end{aligned} \tag{5.58}$$

$$C^2 = [4u - xu_x]\, v \ . \tag{5.59}$$

5.4.3 Equação vc$K(3,2)_{\{\mathbf{X}_4\}}$

Tomando $m = 3$ e $n = 2$ na Eq. (4.17), obtemos

$$u_t + \frac{c_1t}{3}\left[x^{-1}u^3\right]_x + \frac{c_2t}{2}\left[x^{-1}(u^2)_{xx}\right]_x = 0 \ . \tag{5.60}$$

A Eq. (5.60), em conjunto com sua equação adjunta dada por

$$v_t + \frac{2c_2t}{x^3}uv_x + \frac{c_1t}{x}u^2v_x - \frac{2c_2t}{x^2}uv_{xx} + \frac{c_2t}{x}uv_{xxx} = 0 \ ,$$

possui a seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \left[u_t + \frac{c_1t}{3}\left[x^{-1}u^3\right]_x + \frac{c_2t}{2}\left[x^{-1}(u^2)_{xx}\right]_x\right]v \ .$$

Vamos construir a lei de conservação fornecida pela simetria infinitesimal

$$\mathrm{X} = t^{-1}\frac{\partial}{\partial t} \ . \tag{5.61}$$

Para a simetria da Eq. (5.61), temos

$$\theta_2 = t^{-1} \ , \quad W = -\frac{u_t}{t} \ . \tag{5.62}$$

Logo, a lei de conservação nesse caso será $D_x(C^1)+D_t(C^2)=0$, em que

$$C^1 = -\frac{c_2}{x}uu_tv_{xx}+\left[\frac{c_2}{x}(uu_x)_t+\frac{c_2}{x^2}u_tu_x\right]v_x-\frac{1}{x}\left[c_2(uu_{xx})_t-2c_2u_xu_{tx}-c_1u^2u_t\right]v\ , \tag{5.63}$$

$$C^2 = \frac{c_2}{2}\left[x^{-1}(u^2)_{xx}\right]_x v+\frac{c_1}{3}\left[x^{-1}u^3\right]_x v\ . \tag{5.64}$$

5.4.4 Equação vc$K(m,n)_{\{\mathbf{X}_4\}}$

Para o caso geral, com valores de m e n arbitrários, temos a Eq. (4.17),

$$u_t+\frac{c_1t}{m}\left[x^{2m-7}u^m\right]_x+\frac{c_2t}{n}\left[x^{2n-5}(u^n)_{xx}\right]_x=0\ , \tag{5.65}$$

cuja a equação adjunta é

$$\begin{aligned} &v_t+[c_1tx^{2m-7}u^{m-1}-(4n^2-22n+30)c_2tx^{2n-7}u^{n-1}]v_x\\ &\quad -2(2n-5)c_2tx^{2n-6}u^{n-1}v_{xx}-c_2tx^{2n-5}u^{n-1}v_{xxx}=0\ . \end{aligned} \tag{5.66}$$

Usando a Eq. (5.27), obtemos a Lagrangeana para a Eq. (4.17)

$$\mathcal{L}=\left[u_t+\frac{c_1t}{m}\left(x^{2m-7}u^m\right)_x+\frac{c_2t}{n}\left[(x^{2n-5}(u^n)_{xx}\right)_x\right]v\ . \tag{5.67}$$

Vamos agora construir a lei de conservação fornecida pela simetria infinitesimal

$$\mathrm{X}=t^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\ . \tag{5.68}$$

Para a simetria da Eq. (5.68), temos $\theta_1=0,\ \theta_2=t^{-1},\ \eta=0,\ W=-\frac{u_t}{t}$. Portando, a lei de conservação Eq. (5.11), referente à simetria definida na Eq. (5.68), possui componentes

$$\begin{aligned} C^1 = &\left(2n^2-7n+5\right)c_2\left[2u_tu_{xx}+2u_tu_x+u_x+3u_t\right]x^{2n-6}u^{n-2}u_x\\ &-(2n-5)\,c_2\left[u_{xt}-(2n-5)u_t\right]x^{2n-6}u^{n-1}\\ &+(n-1)c_2\left[-2u_tu_{xx}^2+3u_{xx}+u_xu_{xt}-3u_{xt}-(2n-5)u_tu_x\right]x^{2n-5}u^{n-2}u_x\\ &-\left(n^2-3n+2\right)c_2\left[3u_tu_{xx}-2u_tu_x+u_x\right]x^{2n-5}u^{n-3}u_x^2\\ &+c_2\left[u_{xxx}-u_{xxt}+(2n-5)(u_{xx}+u_{xt})\right]x^{2n-5}u^{n-1}\\ &+c_1\left[u_x-u_t+(2m-7)u\right]x^{2m-7}u^{m-1}-\left(4n^2-26n+30\right)c_2x^{2n-7}u^{n-3}u_x^3\\ &+(n-1)c_2\left[-2u_x+3\right]x^{2n-5}u^{n-2}u_x+c_2\left[u_{xt}+(2n-5)u_t\right]x^{2n-5}u^{n-1}v_x\\ &-\left(c_2x^{2n-5}u^{n-1}u_t\right)v_{xx}\ , \end{aligned} \tag{5.69}$$

e

$$C^2 = \left[\frac{c_1}{m}(x^{2m-7}u^m)_x + \frac{c_2}{n}\left(x^{2n-5}(u^n)_{xx}\right)_x\right] v \ . \tag{5.70}$$

5.4.5 Equação vc$K(1,1)_{\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_4\}}$

Consideremos agora a Eq. (4.19),

$$u_t + \left[\frac{c_1 xt}{m} e^{(1-m)x/2tu} u^m + \frac{c_2 t}{n} e^{(1-n)x/2tu} (u^n)_{xx}\right]_x = 0 \ .$$

Sendo $m = n = 1$, teremos a Eq. (4.20), dada por

$$u_t + c_1 tu + c_1 txu_x + c_2 tu_{xxx} = 0 \ .$$

A equação adjunta da Eq. (4.20) é

$$v_t + c_1 txv_x + c_2 tv_{xxx} = 0 \ ,$$

e a Lagrangeana tem a forma

$$\mathcal{L} = v[u_t + c_1 tu + c_1 txu_x + c_2 tu_{xxx}] \ .$$

Como a Lagrangeana é de terceira ordem, o vetor conservado é computado por

$$\begin{aligned} C^i = \theta_i \mathcal{L} + W &\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - D_j\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}}\right) + D_j D_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right)\right] \\ &+ D_j(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}} - D_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right)\right] \\ &+ D_j D_k(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}}\right] \ . \end{aligned} \tag{5.71}$$

Vamos aplicar o Teorema (5.3.0.6) para o gerador de simetria

$$\mathrm{X} = u\frac{\partial}{\partial u} \ . \tag{5.72}$$

Executando o procedimento feito para as equações vc$K(m,n)$ anteriores, encontramos a lei de conservação $D_x(C^1) + D_t(C^2) = 0$, em que o vetor conservado $C = (C^1, C^2)$, Eq. (5.48), e possui as seguintes componentes

$$C^1 = c_2 tuv_{xx} - c_2 tu_x v_x + (c_2 u_{xx} + c_1 xu)tv \ , \tag{5.73}$$

$$C^2 = uv \ . \tag{5.74}$$

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

Este trabalho trata de uma nova proposta de generalização da equação KdV, que denominamos por equação vc$K(m,n)$. A escolha desse tema deve-se à reconhecida importância da equação KdV em diversos campos como física não-linear, sistemas integráveis, física de plasmas e tantos outros. Existe também uma vasta literatura sobre variações ou generalizações da equação KdV, e este trabalho traz uma contribuição nesse sentido.

A ferrerramenta matemática que utilizamos foi o método de simetrias de Lie - partimos da álgebra de simetria 4-dimensional da equação KdV clássica, ℓ_{KdV}, e encontramos classes de equações vc$K(m,n)$ que admitem como álgebra subálgebras da álgebra de simetria ℓ_{KdV}. As classes de equações vc$K(m,n)$ obtidas foram

$$\mathrm{vc}K(m,n)_{\{\mathbf{X_3}\}}, \qquad \mathrm{vc}K(m,n)_{\{\mathbf{X_4}\}}, \qquad \mathrm{vc}K(m,n)_{\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_4\}},$$

sendo que o subescrito refere-se à subálgebra de ℓ_{KdV} admitida por cada equação. Consideramos casos particulares das classes de equações vc$K(m,n)$, ou seja, definimos valores para os parâmetros m e n e obtivemos algumas soluções invariantes.

Construímos também leis de conservação para as equações vc$K(m,n)$, aplicando o recente teorema de conservação proposto por Ibragimov para o caso de equações diferenciais parciais que não possuem Lagrangeana.

Como perspectiva futura para este trabalho, pretendemos continuar a estudar as equações vc$K(m,n)$ no contexto de simetrias. O método de simetrias de Lie oferece outras ferramentas, como a de transformações de equivalência, que permite um mapeamento entre soluções de equações que sejam da uma mesma família, mas que tenham coeficientes distintos. Outra possibilidade é continuar com a busca por novas leis de conservação, bem como a de estudar as equações vc$K(m,n)$ na abordagem de simetrias não-clássicas, ou simetrias potenciais.

Apêndice A

Infinitesimais prolongados

Vamos efetuar a demonstração do teorema (3.3.2.1). De (3.44) e (3.65) temos

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} D_1(x_1+\varepsilon\theta_1) & D_1(x_2+\varepsilon\theta_2) & \dots & D_1(x_n+\varepsilon\theta_n) \\ D_2(x_1+\varepsilon\theta_1) & D_2(x_2+\varepsilon\theta_2) & \dots & D_2(x_n+\varepsilon\theta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_n(x_1+\varepsilon\theta_1) & D_n(x_2+\varepsilon\theta_2) & \dots & D_n(x_n+\varepsilon\theta_n) \end{bmatrix} \\ &= I+\varepsilon B+O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde I é a matriz identidade n x n e B é a matriz

$$B = \begin{bmatrix} D_1\theta_1 & D_1\theta_2 & \dots & D_1\theta_n \\ D_2\theta_1 & D_2\theta_2 & \dots & D_2\theta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_n\theta_1 & D_n\theta_2 & \dots & D_n\theta_n \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

Como A é uma matriz invertível, então

$$A^{-1} = I - \varepsilon B + O(\varepsilon^2). \tag{A.3}$$

De (3.60), (3.66-3.67), (A.2) e (A.3) segue que

$$\begin{bmatrix} u_1+\varepsilon\eta_1^{(1)} \\ u_2+\varepsilon\eta_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_n+\varepsilon\eta_n^{(1)} \end{bmatrix} = [I-\varepsilon B]\cdot \begin{bmatrix} u_1+\varepsilon D_1\eta \\ u_2+\varepsilon D_2\eta \\ \vdots \\ u_n+\varepsilon D_n\eta \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2), \tag{A.4}$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} \eta_1^{(1)} \\ \eta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \eta_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1\eta \\ D_2\eta \\ \vdots \\ D_n\eta \end{bmatrix} - B \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \tag{A.5}$$

que é equivalente a (3.71). De (3.61), (3.67-3.68), (A.2) e (A.3) teremos

$$\begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} + \varepsilon \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} \\ u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 2} + \varepsilon \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n} + \varepsilon \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = [I - \varepsilon B] \cdot \begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} + \varepsilon D_1 \eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \\ u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} + \varepsilon D_2 \eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \\ \vdots \\ u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n} + \varepsilon D_n \eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

de onde concluímos que

$$\begin{bmatrix} \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} \\ \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \\ D_2 \eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n \eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \end{bmatrix} - B \cdot \begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} \\ u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n} \end{bmatrix}, \tag{A.6}$$

onde $i_l = 1, 2, \ldots, n$, $l = 1, 2, \ldots, k-1$ com $k = 2, 3, \ldots$, resultando em (3.72).

Apêndice B

Simetrias da equação $u_t = u_x^2$

Aqui vamos ilustrar a técnica de encontrar todos os geradores infinitesimais de simetrias pontuais (3.111) admitidas pela equação diferencial parcial (3.113). Para a EDP (3.113), a equação determinante de simetria (3.112) é

$$2u_x\eta_1^{(1)} = \eta_2^{(1)} \text{ quando } u_t = u_x^2 \tag{B.1}$$

Após substituir (3.77-3.78) em (B.1), e então eliminando u_t usando a equação (3.113), nós obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \theta_1}{\partial t}u_x + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \theta_2}{\partial t}\right)u_x^2 - \frac{\partial \theta_1}{\partial u}u_x^3 - \frac{\partial \theta_2}{\partial u}u_x^4 \\ &\quad = 2u_x\left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right)u_x - \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x}\right)u_x^2 - \frac{\partial \theta_2}{\partial u}u_x^3\right] \end{aligned} \tag{B.2}$$

Equacionando os termos que são multiplicados por cada potência de u_x e igualando os seus coeficientes a zero, obtemos o conjunto de cinco equações determinantes para θ_1, θ_2 e η

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial u} = 0, \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + 2\frac{\partial \theta_2}{\partial x} = 0, \tag{B.4}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - 2\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0, \tag{B.5}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} + 2\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \tag{B.6}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. \tag{B.7}$$

Começamos por resolver (B.3), para obter

$$\theta_2 = A(x,t), \tag{B.8}$$

onde $A = A(x,t)$ é uma função arbitrária. Substituindo θ_2 por $A(x,t)$ a solução geral de (B.4) é

$$\theta_1 = -2\frac{\partial A}{\partial x}u + B(x,t), \tag{B.9}$$

e a equação (B.5) fica

$$\eta = -2\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}u^2 + \left(2\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial t}\right)u + C(x,t), \tag{B.10}$$

para alguma função B e C. Fazendo a substituição dessas equações em (B.6) e (B.7), teremos

$$-4\frac{\partial^3 A}{\partial x^3} + 4\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial t}\right)u + \frac{\partial B}{\partial t} + 2\frac{\partial C}{\partial x} = 0, \tag{B.11}$$

$$-2\frac{\partial^3 A}{\partial x^2 \partial t}u^2 + \left(2\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right)u + \frac{\partial C}{\partial t} = 0. \tag{B.12}$$

Como as funções A, B e C são independentes de u, (B.11) e (B.12) podem ser decompostas em equações de potências de u. Efetuando a decomposição temos:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0, \tag{B.13}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + 2\frac{\partial C}{\partial x} = 0, \tag{B.14}$$

$$2\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \tag{B.15}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial t} = 0, \tag{B.16}$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial x^2 \partial t} = 0, \tag{B.17}$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial x^3} = 0. \tag{B.18}$$

Executando o procedimento feito para as equações (B.3-B.7), isto é, resolvendo, uma de cada vez, as equações (B.13), (B.14) e (B.15), obtemos

$$C = \alpha(x), \quad B = -2\alpha'(x)t + \beta(x), \quad A = -2\alpha''(x)t^2 + \gamma(x)t + \delta(x) \tag{B.19}$$

Agora, substituindo (B.19) em (B.16-B.18) encontramos

$$\begin{aligned} -2\alpha'''(x)t + \beta''(x) + 4\alpha'''(x)t - \gamma'(x) &= 0, \\ -4\alpha''''(x)t + \gamma''(x) &= 0, \\ -2\alpha'''''(x)t^2 + \gamma'''(x)t + \delta'''(x) &= 0. \end{aligned} \tag{B.20}$$

Vemos que α, β e γ são funções de x. Assim, podemos decompor o sistema (B.20) em equações de potências de t e obter seguinte sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \alpha'''''(x) &= 0, \\ \alpha''''(x) &= 0, \\ \alpha'''(x) &= 0, \\ \gamma'''(x) &= 0, \\ \gamma''(x) &= 0, \\ \beta''(x) - \gamma'(x) &= 0, \\ \delta'''(x) &= 0. \end{aligned} \tag{B.21}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} &\alpha = c_1x^2 + c_2x + c_3, \quad \beta = 1/2c_4x^2 + c_6x + c_7, \\ &\gamma = c_4x + c_5, \quad \delta = c_8x^2 + c_9x + c_{10} \end{aligned} \tag{B.22}$$

Finalmente, substituindo a solução (B.22) em (B.19) e em seguida substituindo (B.19) em (B.8), (B.9) e (B.10), chegamos a solução geral do sistema de equações determinantes para θ_1, θ_2 e η

$$\theta_1 = -4c_1tx - 2c_2t + c_4\left(\frac{1}{2}x^2 - 2tu\right) + c_6x + c_7 - 4c_8xu - 2c_9u, \tag{B.23}$$

$$\theta_2 = -4c_1t^2 + c_4xt + c_5t + c_8x^2 + c_9x + c_{10}, \tag{B.24}$$

$$\eta = c_1x^2 + c_2x + c_3 + c_4xu - c_5u + 2c_6u - 4c_8u^2. \tag{B.25}$$

Apêndice C

Funções especiais

Funções Bessel de primeira espécie

As funções Bessel de primeira espécie $J_n(x)$ [88] são definidas como soluções da equação diferencial de Bessel

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0, \tag{C.1}$$

para um número real ou complexo arbitrário n (a ordem da função Bessel). Para cada n, $J_n(x)$, que é a solução dessa equação, é definida pela série de potências

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \tag{C.2}$$

onde $\Gamma(k)$ é a *função gama*; para valores inteiros, $\Gamma(k+1) = k!$.

A função $J_n(x)$ também pode ser expressa na forma de uma integral como

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta - n\theta) d\theta, \tag{C.3}$$

ou na forma equivalente

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta} d\theta. \tag{C.4}$$

As funções Bessel $J_n(x)$ possui as seguintes propriedades:

1.

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x). \tag{C.5}$$

2.

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(-x). \tag{C.6}$$

3.

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x). \tag{C.7}$$

4. Para valores pequenos de x

$$J_n(x) \backsimeq \frac{x^n}{2^n n!}. \tag{C.8}$$

5. Para valores grandes de x, temos

$$J_n(x) \backsimeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right). \tag{C.9}$$

6.

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n^2(x) = 1, \text{ para todo } x. \tag{C.10}$$

A função Bessel de primeira espécie aparece como solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas. Sua aplicação se dá no campo do eletromagnetismo, condução de calor, vibração, difusão e processamento de sinais (filtro Bessel).

Funções Anger e Weber

A função Anger e a função Weber [89] foram introduzidas, respectivamente, por C. T. Anger (1855) e H. F. Weber (1879), e são definidas como

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - z \operatorname{sen}\theta)\, d\theta, \tag{C.11}$$

$$\mathbf{E}_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\nu\theta - z \operatorname{sen}\theta)\, d\theta. \tag{C.12}$$

A função anger $\mathbf{J}_\nu(z)$ satisfaz a equação de Bessel não-homogênea

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = (z - \nu) \operatorname{sen}(\pi z)/\pi, \tag{C.13}$$

e a função Weber $\mathbf{E}_\nu(z)$ satisfaz a equação

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = -((z+\nu) + (z-\nu)\cos(\pi z))/\pi. \tag{C.14}$$

As funções Anger e Weber possuem as seguintes propriedades

1.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\nu(-z) &= \mathbf{J}_{-\nu}(z), & \text{(C.15)} \\ \mathbf{E}_\nu(-z) &= \mathbf{E}_{-\nu}(z). & \text{(C.16)} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\nu-1}(z) + \mathbf{J}_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z}\mathbf{J}_\nu(z) - \frac{2}{\pi z}\,\mathrm{sen}(\pi\nu), & \text{(C.17)} \\ \mathbf{E}_{\nu-1}(z) + \mathbf{E}_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z}\mathbf{E}_\nu(z) - \frac{2}{\pi z}(1 - \cos(\pi\nu)). & \text{(C.18)} \end{aligned}$$

3.

$$2\mathbf{J}_\nu(z) = \mathbf{J}_{\nu-1}(z) - \mathbf{J}_{\nu+1}(z), \tag{C.19}$$

$$2\mathbf{E}_\nu(z) = \mathbf{E}_{\nu-1}(z) - \mathbf{E}_{\nu+1}(z). \tag{C.20}$$

Funções Hipergeométricas Generalizadas

Em 1812 Gauss apresentou em um artigo a série infinita

$$1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!}\dots \tag{C.21}$$

como uma função de a, b, c e z. Essa série, representada por ${}_2F_1[a,b;c;z]$, para $|z| < 1$, satisfaz a equação linear diferencial, denominada por *equação de Gauss* ou *equação hipergeométrica*, a qual é dada por

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{dy}{dz} - aby = 0, \tag{C.22}$$

onde z é uma variável complexa e a, b e c são parâmetros que podem assumir diversos valores reais ou complexos.

Assim, a *função hipergeométrica generalizada* [90] é a generalização da função hipergeométrica gaussiana. A série é definida como

$$1 + \frac{a_1 \ldots a_p}{b_1 \ldots b_q} \frac{z}{1!} + \frac{a_1(a_1+1) \ldots a_p(a_p+1)}{b_1(b_1+1) \ldots b_q(b_q+1)} \frac{z^2}{2!} + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}. \qquad \text{(C.23)}$$

Tem p parâmetros numerador $a_1, a_2, \ldots, a_p$; q parâmetros denominador $b_1, \ldots, b_q$ e uma variável z. Qualquer um destes parâmetros pode ser real ou complexo, mas os parâmetros b não podem ser inteiros negativos, o que tornaria a série indefinida. Observe que para $p = 2$ e $q = 1$ temos a série hipergeométrica de Gauss. A soma da série, quando existe, é denotada por

$${}_pF_q \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_p \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_q \end{bmatrix}; z \Bigg] \quad \text{ou} \quad {}_pF_q[a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z]. \qquad \text{(C.24)}$$

A série hipergeométrica generalizada mais simples é

$${}_0F_0[\ ;\ ; z] = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = e^x. \qquad \text{(C.25)}$$

Se um parâmetro numerador é igual a um parâmetro denominador, este pode ser cancelado. Por exemplo, ${}_2F_2[a, b; a, c; z] = {}_1F_1[b; c; z]$.

Entendemos por ${}_pF_q[\ldots; cz]$, as séries (C.23) com o fator c^n inserido no n-ésimo coeficiente, ou seja,

$${}_pF_q[\ldots; cz] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n n!} (cz)^n. \qquad \text{(C.26)}$$

O caso em que $p = q = 1$ é denominado por **série hipergeométrica confluente** ou **série de Kummer**.

Apêndice D

Teorema das leis de conservação não-locais

Vamos fazer a prova do teorema (5.3.0.6) para construir leis de conservação fornecida pela simetria infinitesimal de uma equação diferencial arbitrária. Dado um grupo de transformações pontuais com o gerador

$$\mathrm{X} = \theta_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu} \tag{D.1}$$

tomemos o operador estendido (5.31)

$$\mathrm{X}^\dagger = \theta_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu} + \eta^\nu_* \frac{\partial}{\partial v^\nu} \tag{D.2}$$

Para o caso de uma variável dependente u, o coeficiente η_* em (D.2) é dado por

$$\eta_* = -\left[\lambda + D_i(\theta_i)\right] v, \;\; \lambda = \lambda(x, u, \ldots) \tag{D.3}$$

com λ dado pela Eq. (5.32), se (D.1) é uma simetria pontual de Lie. Caso (D.1) for uma simetria de Lie-Bäcklund o coeficiente η_* é

$$\eta_* = -\left[\lambda_0 + D_i(\theta_i)\right] v + D_i(v\lambda_1^i) - D_i D_j(v\lambda_2^{ij} + D_i D_j D_k(v\lambda_3^{ijk}) - \ldots, \tag{D.4}$$

onde λ é obtido da Eq. (5.33). Agora, estendemos a ação do operador

$$\mathcal{N}^i = \theta_i + W^\nu \frac{\delta}{\delta u_i^\nu} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \cdots D_{i_s}(W^\nu) \frac{\delta}{\delta u^\nu_{ii_1\cdots i_s}}, \tag{D.5}$$

para funções diferenciais de variáveis u^ν, v^ν e obtemos o seguinte prolongamento dos operadores $\mathcal{N}^i$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_*^{\,i} &= \theta_i + W^\nu \frac{\delta}{\delta u_i^\nu} + W_*^\nu \frac{\delta}{\delta v_i^\nu} + \\ &\sum_{s=1}^{\infty}\left[D_{i_1}\cdots D_{i_s}(W^\nu)\frac{\delta}{\delta u^\nu_{ii_1\cdots i_s}} + D_{i_1}\cdots D_{i_s}(W_*^\nu)\frac{\delta}{\delta v^\nu_{ii_1\cdots i_s}}\right], \end{aligned} \tag{D.6}$$

onde

$$W^\nu = \eta^\nu - \theta_j u_j^\nu, \quad W_*^\nu = \eta_*^\nu - \theta_j v_j^\nu, \tag{D.7}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta u_i^\nu} &= \frac{\partial}{\partial u_i^\nu} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_{j_1}\cdots D_{j_s}\frac{\partial}{\partial u^\nu_{ij_1j_2\cdots j_s}},\\ \frac{\delta}{\delta v_i^\nu} &= \frac{\partial}{\partial v_i^\nu} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_{j_1}\cdots D_{j_s}\frac{\partial}{\partial v^\nu_{ij_1j_2\cdots j_s}},\\ \frac{\delta}{\delta u_{ii_1}^\nu} &= \frac{\partial}{\partial u_{ii_1}^\nu} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_{j_1}\cdots D_{j_s}\frac{\partial}{\partial u^\nu_{ii_1j_1j_2\cdots j_s}},\\ \frac{\delta}{\delta v_{ii_1}^\nu} &= \frac{\partial}{\partial v_{ii_1}^\nu} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_{j_1}\cdots D_{j_s}\frac{\partial}{\partial v^\nu_{ii_1j_1j_2\cdots j_s}}\end{aligned} \tag{D.8}$$

Assim, a identidade fundamental

$$\mathrm{X} + D_i(\theta_i) = W^\nu \frac{\delta}{\delta u^\nu} + D_i\mathcal{N}^i \tag{D.9}$$

também é estendida e tem a forma:

$$\mathrm{X}^\dagger + D_i(\theta_i) = W^\nu \frac{\delta}{\delta u^\nu} + W_*^\nu \frac{\delta}{\delta v^\nu} + D_i\mathcal{N}_*^i. \tag{D.10}$$

Agora atuando a identidade fundamental (D.10) na Lagrangeana $\mathcal{L} = v^\nu F_\nu$ teremos

$$\mathrm{X}^\dagger\mathcal{L} + \mathcal{L}D_i(\theta_i) = W^\nu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u^\nu} + W_*^\nu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta v^\nu} + D_i\mathcal{N}_*^i\mathcal{L}. \tag{D.11}$$

O lado esquerdo da Eq. (D.11) representa a condição de invariância e deve ser igual a zero. No lado direito temos que $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u^\nu}$ e $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta v^\nu}$ devem ser nulas (equações de Euler-Lagrange). Portanto, de (D.11) obtemos a lei de conservação

$$D_i(C^i) = 0, \tag{D.12}$$

onde

$$C^i = \mathcal{N}_*^i(\mathcal{L}) \tag{D.13}$$

Como a Lagrangeana $\mathcal{L} = v^\nu F_\nu$ não contém derivadas das variáveis v^ν, segue que a lei de conservação se reduz a forma

$$D_i(C^i) = 0, \quad C^i = \mathcal{N}^i(\mathcal{L}) \tag{D.14}$$

e assim completamos a prova do teorema (5.3.0.6).

Bibliografia

[1] E. Maor, Int. J. Math. Educ. Sci. Tech. **6** (1975) 345.

[2] M. Counihan, Eur. J. Phys. **28** (2007) 1189.

[3] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics* (Wiley, New York, 1975).

[4] R. M. M. Mattheij, S. W. Rienstra e J. H. M. ten Thije Boonkkamp, *Partial Differential Equation: Modeling, Analysis, Computation* (SIAM, Philadelphia, 2005).

[5] D. A. Greenwood, Proc. Phys. Soc. **71** (1958) 585.

[6] L. Euler, MASB **11** (1757) 217; O. Darrigol, Stud. Hist. Philos. Sci. Part B: Stud. Hist. Philos. Mod. Phys. **38** (2007) 757.

[7] J. C. Maxwell, Philos. Trans. R. Soc. Lond. **155** (1865) 459; .

[8] D. J. Korteweg e G. de Vries, Philos. Mag. **39** (1895) 422.

[9] H. Blas e H. L. Carrion, Int. J. Pure Appl. Math. **50** (2009) 213.

[10] H. Blas, M. Botelho e L. F. Santos, **PoS(ISFTG)047** (2009).

[11] T. Schmidt, *O método inverso ao espalhamento e algumas aplicações*, Dissertação de Mestrado, UFMT (2010).

[12] J. S. Russel, *Report on Waves*, Rep. 14th Meet. Br. Assoc. Adv. Sci., John Murray (ed.), London (1844).

[13] E. Fermi, J. Pasta e S. M. Ulam, *Studies in Nonlinear Problem* Tech. Rep. **LA-1940**, Los Alamos Sci. Lab. (1955).

[14] N. J. Zabusky e M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. **15** (1965) 240.

[15] H. Kever e G. K. Morikawa, Phys. Fluids **12** (1969) 2090.

[16] E. A. El-Wakil, E. M. Abulwafa, E. K. El-shewy e A. A. Mahmoud, [arXiv:1006.5056v1].

[17] M. A. Helal, Chaos Sol. Fract. **13** (2002) 1917.

[18] J. Zhang, F. Wu e J. Shi, Int. J. Theor. Phys. **39** (2000) 1697.

[19] A. H. Bokhari, A. H. Kara e F. D. Zaman, Nuovo Cimento **120** (2005) 393.

[20] T. Karahara, J. Phys. Soc. Japan **27** (1970) 1321.

[21] Z. Feng e Q. Meng, Sci. China Series A: Math. **50** (2007) 412.

[22] J. P. Gazeau e P. Winternitz, J. Math. Phys. **33** (1992) 4087.

[23] V. Dorodnitsyn e P. Winternitz, Nonl. Dyn. **22** (2000) 49.

[24] S. K. Turitsyn, A. B. Aceves, C. K. R. T. Jones e V. Zharnitsky, Phys. Rev. E **58** (1998) R48.

[25] J. Shen e W. Xu, Chaos Sol. Fract. **34** (2007) 1299.

[26] Y. Yang, Z. Tao e F. R. Austin, Appl. Math. Comput. **216** (2010) 1029.

[27] P. Rosenau e J. M. Hyman, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 564.

[28] F. Rus e F. R. Villatoro, Appl. Math. Comput. **215** (2009) 1838.

[29] P. Bracken, Int. J. Math. Math. Sci. **13** (2005) 2159.

[30] P. Rosenau, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 1737.

[31] A. Pikovsky, P. Rosenau, Phys. D. **218** (2006) 56.

[32] P. Rosenau, Phys. Lett. A **356** (2006) 44.

[33] Y. Wang, L. Wang e W. Zhang, Int. J. Nonl. Sci. **2** (2006) 29.

[34] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer Verlang, Berlin, 1986).

[35] G. W. Bluman e S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations - Applied Mathematical Science* **81** (Springer Verlang, Secaucus, 1989).

[36] P. E. Hydon, *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide* (Cambridge University Press, New York, 2000).

[37] F. Engel e S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen* (B. G. Teubner, Leipzig, 1888); (Chelsea Publishing Co., New York, 1970).

[38] L. V. Ovsyannikov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **118** (1958) 439.

[39] E. M. Silva, T. M. Rocha Filho e A. E. Santana, J. Phys: Conf. Series **40** (2006) 150.

[40] W. L. Souza e E. M. Silva, **PoS(ISFTG)058** (2009).

[41] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*. Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen (1918) 235; E. Noether e M. A. Tavel, Transport Theor. Stat. Phys. **1** (1971) 183.

[42] N. H. Ibragimov, J. Math. Anal. Appl. **333** (2007) 311.

[43] M. L. Gandarias e N. H. Ibragimov, J. Math. Analysis Appl. **357** (2009) 307.

[44] F. Güngör, V. I. Lahno e R. Z. Zhdanov, J. Math. Phys. **45** (2004) 2280.

[45] K. Singh e R. K. Gupta, Int. J. Math. Math. Sci. **23** (2005) 3711.

[46] J. A. Cardeal, A. E. Santana e T. M. Rocha Filho, Physica A **308** (2002) 292.

[47] J. A. Cardeal, M. Montigny, F. C. Khanna, T. M. Rocha Filho e A. E. Santana, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007) 13467.

[48] E. M. Silva, *Espaço de Fock em Redes Fermiônicas e Simetrias de Lie em Processos de Difusão Não-Lineares*. Tese de Doutorado, UnB, 2008.

[49] I. L. Freire, Hadronic J. **30** (2007) 299.

[50] I. L. Freire, *Simetrias de Lie de Equações Diferenciais Parciais Semilineares Envolvendo o Operador de Kohn-Laplace no Grupo de Heisenberg*, Tese de Doutorado, UNICAMP, 2008.

[51] Y. D. Bozhkov e I. L. Freire, J. Nonl. Math. Phys. **15** (2008) 35.

[52] I. L. Freire, *Conservation laws for self-adjoint first order evolution equations*, J. Nonl. Math. Phys (*Print*) (2011).

[53] T. M. Rocha Filho e A. Figueiredo, Comput. Phys. Commun. **182** (2011) 467.

[54] T. M. Rocha Filho e A. Figueiredo, http://ares.fis.unb.br/fismat/sade.html.

[55] J. L. Hammack e H. Segur, J. Fluids Mech. **65** (1974) 289.

[56] H. Song e L. Tao, ANZIAM J. **50 (CTAC2008)** (2008) C152.

[57] A. Ludu, R. A. Ionescu e W. Greiner, Found. Phys. **26** (1996) 665.

[58] N. A. Larkin, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática **22** (2004) 30.

[59] M. Boiti e F. Pempinelli, Nuovo Cimento B **51** (1979) 70.

[60] He Ping, C. Zheng e Fu Jun, Appl. Math. Comp. **162** (2005) 447.

[61] D. Schrader, IEEE J. Quant. Electron. **31** (1995) 2221.

[62] A. Chertock e D. Levy, J. Sci. Comp. **17** (2002) 491.

[63] H. Grad e P. N. Hu, Phys. Fluids **10** (1967) 2596.

[64] T. S. Komatsu e S. Sasa, Phys. Rev. E **52** (1995) 5574.

[65] A. Bekir, Commun. Nonl. Sci. Numer. Simul. **14** (2009) 1038.

[66] V. Narayanamurti e C. M. Varma, Phys. Rev. Lett. **25** (1970) 1105.

[67] W. Ames, *Nonlinear Partial Differential Equations* (Academic Express, New York, 1967).

[68] E. Hopf, Commun. Pure Appl. Math. **3** (1950) 201.

[69] N. Antar e H. Demiray, ZAMP **48** (1997) 325.

[70] W. Duan, Commun. Theor. Phys. **37** (2002) 739.

[71] S. D. Liu e S. K. Liu, Sci. Sin.: Series A **35** (1992) 576.

[72] P. N. Hu, Phys. Fluids **15** (1972) 854.

[73] M. W. Coffey, Phys. Rev. B **54** (1996) 1279.

[74] G. Huang, J. Szeftel e S. Zhu, Phys. Rev. A **65** (2002) 053605.

[75] B. Tian, G. Wei, C. Zhang, W. Shan e Y. Gao, Phys. Lett. A **356** (2006) 8.

[76] P. E. Holloway, E. Pelinovsky e T. Talipova, J. Geophys. Res. **104** (1999) 18333.

[77] Y. Zhang, J. Li e Y. Lv, Ann. Phys. **323** (2008) 3059.

[78] X. Tang, F. Huang e S. Lou, Chinese Phys. Lett. **23** (2006) 887.

[79] N. Smaoui e F. Begalcem, J. Appl. Math. Stoch. Anal. **15** (2002) 53.

[80] L. Gagnon e P. Winternitz, J. Phys. A: Math. Gen. **21** (1998) 1493.

[81] P. E. G. Assis e A. Fring, PRAMANA **74** (2010) 857.

[82] V. A. Vladimirov, Rep. Math. Phys. **61** (2008) 381.

[83] S. Xie e J. Cai, Commun. Nonl. Sci. Num. Simul. **14** (2009) 3561.

[84] S. Kuru, Chaos Sol. Fract. **42** (2009) 626.

[85] H. Stephani e M. Maccallum, *Differential Equations: Their Solutions Using Symmetries* (Cambridge University Press, New York, 1989).

[86] N. H. Ibragimov, J. Math. Anal. Appl. **318(2)** (2006) 742.

[87] G. Bluman, SIGMA **1** (2005) 11.

[88] S. Haykin, *Sistemas de Comunicação: Analógicos e Digitais* (Bookman, Porto Alegre, 2004).

[89] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert e C. W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions* (Cambrigde University Press, New York, 2010).

[90] T. C. G. Robalo, *Séries Hipergeométricas Generalizadas no Contexto da Teoria das Funções Hipercomplexas*, Dissertação de Mestrado, U.A., Portugal, 2006.