

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Resultados de coincidência para polinômios dominados entre espaços de Banach

Ana Cecília Costa de Freitas

2009

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Resultados de coincidência para polinômios dominados entre espaços de Banach

por

Ana Cecília Costa de Freitas

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

26 de novembro de 2009
João Pessoa-PB

Resultados de coincidência para polinômios dominados entre espaços de Banach

por

Ana Cecília Costa de Freitas

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso (UFC)

Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho (UFCG)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros (UFPB)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

*Aos meus pais,
José e Leonice.*

Agradecimentos

Aos meus pais, *José* e *Leonice*, meus maiores exemplos de vida, agradeço pelos ensinamentos, pelo imenso amor e apoio em tudo que preciso. Obrigada por me fazer acreditar que posso dar passos importantes na vida.

À minha irmã e melhor amiga *Patrícia*, pelo ser maravilhoso que és, pelas suas palavras que animam minha vida, pelo grandioso amor e apoio.

Ao meu namorado *Agostinho*, pelo companheirismo, paciência e compreensão.

Aos meus irmãos *Fabiano* e *Adriano*, que sempre me ajudaram no que precisei.

Aos meus sobrinhos *Ana Clara*, *João Victor*, *Lucas* e *Guilherme*, pelas alegrias que dão em minha vida.

À minha quase sobrinha *Cristiane*, pelos conselhos e conversas bem humoradas.

Às minhas cunhadas *Glória* e *Andréa*, pela prestatividade.

Ao meu primo *Calixto*, por ter me acolhido aqui em João Pessoa.

Ao meu professor e orientador *Daniel Marinho Pellegrino*, pela imensa atenção que teve comigo desde que cheguei aqui. Pela paciência, boa vontade e disponibilidade de esclarecer sempre minhas dúvidas.

Aos professores *José Gomes de Assis*, *Pedro Antonio Hinojosa Vera* e *Fernando Antônio Xavier de Sousa*, pelo aprendizado e atenção.

Aos professores *José Othon Dantas Lopes* e *João Montenegro de Miranda*, pela recomendação e incentivo.

A todos os meus colegas desta pós-graduação que me ajudaram, incentivaram e motivaram para que eu pudesse chegar até aqui.

À minha colega e amiga *Andréa* e sua família, pela amizade adquirida, pela convivência e pela ajuda nas horas de estudo.

Às minhas amigas *Cristiane* e *Vânia*, pelo incentivo.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a Deus, pelo maior presente: a vida.

Resumo

Neste trabalho estudamos a teoria de polinômios dominados entre espaços de Banach, destacando alguns resultados clássicos e recentes de coincidência e não-coincidência, relacionando-os ao cotipo dos espaços de Banach envolvidos. E, por fim, apresentamos, com detalhes, resultados não publicados de Botelho, Pellegrino e Rueda, que demonstram uma conjectura sobre resultados de coincidência para polinômios dominados. Uma versão mais forte dessa conjectura foi recentemente demonstrada em [11].

Palavras-Chave:

Operadores Absolutamente Somantes, Cótipo, Polinômios Absolutamente Somantes e Dominados, Resultados de Coincidência.

Abstract

In this work we investigate the theory of dominated polynomials between Banach spaces, highlighting some classical and recent results related to the cotype of the Banach spaces involved. Finally, we give a detailed presentation of unpublished results due to Botelho, Pellegrino and Rueda, that proves a conjecture on coincidence results for dominated polynomials. A stronger version of this conjecture was recently proved in [11].

Key-Words:

Absolutely Summing Operators, Cotype, Absolutely Summing and Dominated Polynomials, Coincidence Results.

Sumário

1	Operadores Absolutamente Somantes	2
1.1	Séries em espaços de Banach	2
1.2	Sequências fracamente somáveis	5
1.3	Operadores Absolutamente Somantes e a contribuição de Grothendieck	6
1.3.1	A Desigualdade e o Teorema de Grothendieck	7
1.4	Cotipo e operadores absolutamente somantes	8
1.4.1	Resultados clássicos	9
1.4.2	Resultados recentes	11
1.5	O Teorema de Lindenstrauss-Pelczyński	12
2	Polinômios Absolutamente Somantes	14
2.1	Aplicações Multilineares e Polinômios Homogêneos	14
2.2	Polinômios Absolutamente Somantes e Polinômios Dominados	16
2.2.1	Polinômios Absolutamente Somantes	16
2.2.2	Polinômios Dominados	18
2.3	Uma conjectura	19
3	Variações não-lineares de um argumento de Lindenstrauss e Pelczyński	21
3.1	Resultados recentes de coincidência para polinômios absolutamente somantes	22
3.2	Resultados de coincidência para polinômios dominados	29
3.3	A demonstração da conjectura	34

Introdução

A teoria de operadores absolutamente somantes surgiu, na década de 50, a partir de ideias de A. Grothendieck em seu famoso Resumé, como consequência do grande desenvolvimento da teoria dos espaços de Banach. Esse foi o maior legado deixado por Grothendieck nesta área, antes de dedicar-se à geometria algébrica. Entretanto em 1968, com as contribuições de Joram Lindenstrauss e Aleksander Pełczyński, suas ideias ganharam um novo enfoque, tornando-se conhecidas, mais acessíveis e proporcionando um rápido desenvolvimento da teoria e aplicações, fazendo renascer a Teoria dos Espaços de Banach.

A partir dos anos 80, o matemático alemão Albrecht Pietsch, sugeriu uma abordagem não-linear para a teoria de operadores absolutamente somantes; desde então vários autores começaram a investigar diversas versões não-lineares para o conceito de operador absolutamente somante. Dentre as várias possíveis generalizações, o conceito de polinômios dominados tem um destaque especial e vem sendo fruto de vários trabalhos.

No presente trabalho dissertaremos sobre a teoria de polinômios absolutamente somantes e exploraremos, com mais detalhes, resultados recentes da teoria de polinômios dominados entre espaços de Banach. O resultado principal deste trabalho será a demonstração de uma conjectura, não publicada, devida a Botelho, Pellegrino e Rueda, sobre resultados de coincidência para polinômios dominados.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

No Capítulo 1, apresentamos os elementos básicos da teoria dos operadores absolutamente somantes e introduzimos alguns conceitos e resultados importantes.

No Capítulo 2, apresentamos o conceito de aplicações multilineares, polinômios homogêneos absolutamente somantes e dominados, bem como resultados essenciais para o desenvolvimento do nosso objeto de estudo, que será apresentado no capítulo seguinte.

No Capítulo 3, destacamos uma série de resultados recentes, todos inspirados em um argumento, usado na teoria linear, devido a Lindenstrauss e Pełczyński, que culminam com uma demonstração, não publicada, devida a Botelho, Pellegrino e Rueda, sobre a limitação de resultados de coincidência para polinômios dominados.

Notação e Terminologia

Neste trabalho faremos o uso da seguinte simbologia:

- $\mathbb{N}$ denotará o conjunto dos inteiros positivos.
- Se A é um conjunto qualquer, $A^{\mathbb{N}}$ denotará $A \times A \times A \times \dots$.
- $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$.
- A menos que se mencione algo em contrário, X e Y denotarão espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.
- H denotará um espaço de Hilbert.
- O conjunto de todas as aplicações m -lineares de $X_1 \times \dots \times X_m$ em Y é denotado por $L(X_1, \dots, X_m; Y)$. Quando $X_1 = \dots = X_m$, escrevemos $L(^m X; Y)$ ao invés de $L(X_1, \dots, X_m; Y)$.
- O conjunto de todas as aplicações m -lineares contínuas de $X_1 \times \dots \times X_m$ em Y é denotado por $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Quando $X_1 = \dots = X_m$, escrevemos $\mathcal{L}(^m X; Y)$ ao invés de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$.
- O espaço de Banach formado por todos os polinômios m -homogêneos $P : X \rightarrow Y$ é denotado por $P(^m X; Y)$.
- O espaço de Banach formado por todos os polinômios m -homogêneos contínuos $P : X \rightarrow Y$ com a norma $\|P\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\|$ será denotado por $\mathcal{P}(^m X; Y)$.
- O espaço de todos os polinômios m -homogêneos absolutamente (p, q) -somantes de X em Y é denotado por $\mathcal{P}_{as(p,q)}(^m X; Y)$. Se $m = 1$, o espaço é denotado por $\mathcal{L}_{as(p,q)}(X; Y)$.
- O espaço de todos os polinômios m -homogêneos r -dominados de X em Y é denotado por $\mathcal{P}_{d,r}(^m X; Y)$.
- O dual topológico de um espaço de Banach X será denotado por X^* e B_{X^*} representará a sua bola unitária fechada.
- id_X denotará o operador identidade em X .
- Denotaremos por $C(K)$ o espaço de Banach das funções contínuas (com a norma do sup) definidas em um espaço topológico compacto de Hausdorff K .
- Se $1 < q < \infty$, q^* indica o conjugado de q , isto é, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$.
- δ_{jk} representa o delta de Kronecker, definido por $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}$.

Capítulo 1

Operadores Absolutamente Somantes

Este primeiro capítulo será dedicado à teoria linear de operadores absolutamente somantes e ao estudo do conceito de cotipo de um espaço de Banach. Como veremos, a teoria clássica de operadores absolutamente somantes tem uma forte relação com o cotipo dos espaços de Banach envolvidos. Essa relação será explorada, com mais detalhes, no contexto polinomial, no Capítulo 3.

1.1 Séries em espaços de Banach

Séries em espaços de Banach têm um papel central na motivação da teoria de operadores absolutamente somantes.

Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço vetorial normado E é dita absolutamente somável se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Nesse caso, dizemos que a série correspondente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ for tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

converge, qualquer que seja a bijeção $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dizemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável e que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é incondicionalmente convergente. Uma consequência do Teorema de Hahn-Banach garante que se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

para toda bijeção $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Para detalhes, sugerimos [30, pag 6].

É interessante observar que espaços de Banach são caracterizados através da convergência de séries:

Teorema 1.1.1 *Um espaço vetorial normado E é Banach se, e somente se, cada série absolutamente convergente for convergente em E .*

Demonstração. $\implies$) Seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

uma série absolutamente convergente em E ; faça $S_k = \sum_{n=1}^k x_n$. Afirmamos que a sequência $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ converge em E . De fato, para $n > m$, temos

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^n x_j \right\| \leq \sum_{j=m+1}^n \|x_j\|. \quad (1.1)$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$ é convergente, segue de (1.1) que dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$n, m \geq N \Rightarrow \|S_n - S_m\| < \varepsilon.$$

Logo, (S_n) é convergente (pois é de Cauchy em E , que é espaço de Banach).

$\Leftarrow$) Agora, temos que toda série absolutamente convergente em E é também convergente. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em E . Queremos mostrar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ também converge. Para tanto, dados $m, n \in \mathbb{N}$, dado $k \in \mathbb{N}$, existe n_k tal que se $m, n \geq n_k$, então

$$\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^k}$$

Desta forma, podemos encontrar números naturais $n_1 < n_2 < \dots$ tais que

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Em particular,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

e, portanto, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

é absolutamente convergente e, por hipótese, é convergente.

Observe que

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^k (x_{n_{j+1}} - x_{n_j}),$$

donde conclui-se que $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ é convergente. Assim, a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy e admite subsequência convergente; logo $(x_n)_{n=1}^\infty$ também converge, o que implica que E é completo. ■

Sabemos que todo espaço vetorial normado de dimensão finita é um espaço de Banach e, para todo espaço nessas condições, quaisquer duas normas são equivalentes. No entanto, quando passamos a trabalhar em espaços de dimensão infinita, muitas propriedades típicas em espaços finito-dimensionais são perdidas como, por exemplo, a compacidade da bola unitária fechada. Em relação à convergência de séries, Dirichlet provou que, na reta, uma série converge incondicionalmente se, e somente se, converge absolutamente. Entretanto, mesmo em alguns espaços de Banach de dimensão infinita específicos, não era fácil perceber se esses tipos de convergência eram equivalentes. Essa dificuldade tornou-se clara, a partir do importante Teorema de Dvoretzky-Rogers, provado na década de 50, que garantiu a existência de uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável, para qualquer espaço de Banach de dimensão infinita. O Teorema de Dvoretzky-Rogers, que será enunciado a seguir, é essencialmente devido ao seguinte lema:

Lema 1.1.2 *Seja X um espaço de Banach de dimensão $2n$. Então existem n vetores $x_1, \dots, x_n$ em X , com $\frac{1}{2} \leq \|x_j\| \leq 1$ e $j = 1, \dots, n$ tais que para quaisquer escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tem-se*

$$\left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\| \leq \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Teorema 1.1.3 (Dvoretzky-Rogers) *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então para qualquer escolha de $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ em l_2 , existe uma sequência incondicionalmente somável $(x_n)_{n=1}^\infty$ em X com $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Note que, em particular, se escolhermos $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ em $l_2 - l_1$, o Teorema de Dvoretzky-Rogers garante que existe uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável.

Para detalhes da demonstração do lema e do teorema, veja [14] ou [30], para um texto em português.

1.2 Sequências fracamente somáveis

Para cada número real p , com $0 < p < \infty$, recordamos a definição de espaços l_p , dada por

$$l_p = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}.$$

A função $\|\cdot\|_p$ dada por $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ é uma norma em l_p (p -norma se $0 < p < 1$).

Definição 1.2.1 *Sejam X um espaço de Banach e $0 < p < \infty$. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é fortemente p -somável se a sequência de escalares correspondente $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ estiver em l_p .*

Denotaremos por $l_p(X)$ o espaço vetorial de todas as sequências fortemente p -somáveis em X , ou seja,

$$l_p(X) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty \right\}.$$

Em $l_p(X)$ definimos

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p = \infty$, definimos $l_{\infty}(X)$ como o espaço das sequências limitadas de vetores (em X) dado por

$$l_{\infty}(X) := \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} := \sup_n \|x_n\| < \infty \right\}.$$

Definição 1.2.2 *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é fracamente p -somável se a sequência de escalares $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ estiver em l_p para todo $\varphi \in X^*$.*

Denotaremos por $l_p^w(X)$ o conjunto de todas as sequências fracamente p -somáveis em X , ou seja,

$$l_p^w(X) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty, \text{ para todo } \varphi \in X^* \right\}.$$

Em $l_p^w(X)$ consideramos

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O Teorema do Gráfico Fechado garante que $\|\cdot\|_{w,p}$ está bem definido (é finito). Não é difícil mostrar que $\|\cdot\|_{w,p}$ é uma norma em $l_p^w(X)$. O caso $p = \infty$ será útil no decorrer do texto. Precisamente, se $p = \infty$, definimos

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,\infty} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^\infty\|_\infty.$$

O seguinte resultado é simples, porém útil:

Proposição 1.2.3 *Para qualquer espaço de Banach X vale, isometricamente, a igualdade*

$$l_\infty^w(X) = l_\infty(X).$$

Demonstração. Basta observar as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty &= \sup_n \|x_n\| = \sup_n \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x_n)| \\ &= \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sup_n |\varphi(x_n)| \\ &= \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^\infty\|_\infty \\ &= \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,\infty}. \end{aligned}$$

■

1.3 Operadores Absolutamente Somantes e a contribuição de Grothendieck

Definição 1.3.1 *Sejam X e Y espaços de Banach e $u : X \rightarrow Y$ um operador linear contínuo. Dados $1 \leq p, q < \infty$, dizemos que u é absolutamente (p, q) -somante (ou (p, q) -somante) se $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in l_p(Y)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in l_q^w(X)$.*

Denotaremos por $\mathcal{L}_{as(p,q)}(X; Y)$ o conjunto formado por todos os operadores (p, q) -somantes de X em Y . Quando $p = q$, escreveremos $\mathcal{L}_{as,p}(X; Y)$ no lugar de $\mathcal{L}_{as(p,q)}(X; Y)$. Neste caso, dizemos simplesmente que u é absolutamente p -somante. É possível mostrar que os operadores $u : X \rightarrow Y$ absolutamente 1-somantes são precisamente aqueles tais que $(u(x_j))_{j=1}^\infty$ é absolutamente somável sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty$ é incondicionalmente somável. Para maiores detalhes e exemplos, sugerimos [14].

O resultado a seguir oferece várias caracterizações para operadores absolutamente (p, q) -somantes. Para detalhes da demonstração, veja [14, 30]:

Proposição 1.3.2 *Seja $u \in \mathcal{L}(X; Y)$. São equivalentes:*

(i) *u é (p, q) -somante,*

(ii) Existe $L > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.2)$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_n$ em X e n natural,

(iii) Existe $L > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.3)$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$.

Denotamos por $\pi_{p,q}(u)$ o ínfimo dos L para os quais as desigualdades acima são válidas.

O próximo resultado, devido a Grothendieck e Pietsch (mas em geral creditado a Pietsch), é um dos pilares da teoria e oferece uma interessante caracterização de operadores absolutamente somantes por intermédio de medidas de probabilidade:

Teorema 1.3.3 (Teorema da Dominação de Pietsch (Linear)) *Seja $1 \leq p < \infty$. Um operador $u : X \rightarrow Y$ linear contínuo é p -somante se, e somente se, existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida regular de probabilidade μ nos borelianos de B_{X^*} , com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para cada x em X .

1.3.1 A Desigualdade e o Teorema de Grothendieck

Como mencionamos anteriormente, Grothendieck é o precursor da teoria de operadores absolutamente somantes. Mais ainda, seu famoso Resumé, publicado pela Revista da Sociedade Matemática de São Paulo, contém, na linguagem de produtos tensoriais, as noções essenciais da Teoria de Espaços de Banach que seriam estudadas até os dias de hoje. No que se refere à teoria de operadores absolutamente somantes, dentre as várias contribuições de Grothendieck, merecem destaque especial a Desigualdade de Grothendieck e o Teorema de Grothendieck, que enunciamos abaixo:

Teorema 1.3.4 (Desigualdade de Grothendieck) *Existe uma constante positiva K_G tal que, para todo espaço de Hilbert H , todo $n \in \mathbb{N}$, toda matriz $(a_{ij})_{n \times n}$ e quaisquer $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ na bola unitária de H , vale a seguinte desigualdade:*

$$\left| \sum_{i,j} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leq K_G \sup \left\{ \left| \sum_{i,j} a_{ij} s_i t_j \right| : |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1 \right\}. \quad (1.4)$$

Observação 1.3.5 K_G é chamada de constante de Grothendieck e denota a menor constante que satisfaz a desigualdade acima. As constantes de Grothendieck para o caso real e complexo são denotadas, respectivamente, por K_G^R e K_G^C . Os valores exatos dessas constantes não são conhecidos, porém, as seguintes estimativas são válidas (veja [14])

$$\begin{cases} 1,571 \approx \frac{\pi}{2} \leq K_G^R \leq \frac{\pi}{2 \sinh^{-1} 1} \approx 1,782 \\ 1,338 \leq K_G^C \leq 1,405, \end{cases}$$

Teorema 1.3.6 (Grothendieck) *Todo operador linear contínuo $u : l_1 \longrightarrow l_2$ é absolutamente 1-somante.*

1.4 Cotipo e operadores absolutamente somantes

O conceito de cotipo de um espaço de Banach é fruto natural de trabalhos de J. Hoffmann-Jorgensen, Stanislaw Kwapien, Bernard Maurey e Gilles Pisier, publicados na década de 70, e tem forte relação com a teoria de probabilidade em espaços de Banach.

Definimos as funções de Rademacher

$$r_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

por

$$r_n(t) := \text{sign}(\sin 2^n \pi t).$$

Dividindo o intervalo $[0, 1]$ em 2^n sub-intervalos $I_k = (\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$, com $k = 1, \dots, 2^n$, temos que $[0, 1]$ será formado pela união de todos os I_k e os seus extremos. Assim, as funções de Rademacher assumem, alternadamente, os valores 1 e -1 à medida que t percorre o intervalo $[0, 1]$ e na fronteira dos intervalos I_k assumem o valor zero.

Um fato importante das funções de Rademacher é que elas possuem a propriedade de ortogonalidade, ou seja,

$$\int_0^1 r_j(t) r_k(t) dt = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}.$$

Definição 1.4.1 *Um espaço de Banach X possui cotipo finito $q \geq 2$ se existir uma constante $\kappa \geq 0$, tal que, para qualquer escolha finita $x_1, \dots, x_n$ de elementos de X , vale a desigualdade*

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \kappa \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.5)$$

Quando $q = \infty$ substituímos o primeiro membro da desigualdade acima por $\max_{j \leq n} \|x_j\|$.

Denotamos por $C_q(X)$ o ínfimo das constantes κ que satisfazem (1.5).

Note que a integral

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt$$

se comporta como uma média de todas as somas dos vetores $x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$ com todas as 2^n variações de sinais possíveis.

Também é fácil ver, usando um argumento canônico, que a constante $C_q(X)$ é assumida na desigualdade acima. De fato, suponhamos que não fosse assumida; então existiriam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_{n_0}$ em X tais que

$$\left(\sum_{i=1}^{n_0} \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} > C_q(X) \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n_0} r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, teríamos

$$\left(\sum_{i=1}^{n_0} \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} > (C_q(X) + \varepsilon) \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n_0} r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

e isso contradiz o fato de ser $C_q(X)$ o ínfimo das constantes κ que satisfazem (1.5). Esse mesmo tipo de argumento mostra que o ínfimo das constantes L que satisfazem (1.2) ou (1.3) também é assumido.

Definimos por $\cot X$ o ínfimo dos cotipos assumidos por X , isto é,

$$\cot X = \inf\{2 \leq p \leq \infty: X \text{ tem cotipo } p\}.$$

Exemplo 1.4.2 Se $1 \leq p \leq 2$, os espaços l_p têm cotipo 2; se $p \geq 2$, os espaços l_p têm cotipo p . Resultados similares valem para espaços do tipo L_p (veja [14]).

Exemplo 1.4.3 Todo espaço de Banach X tem, pelo menos, cotipo infinito (veja [14]).

Exemplo 1.4.4 l_∞ , c_0 e $C[0, 1]$ não possuem cotipo finito (veja [14]).

É interessante informar que há espaços de Banach que possuem cotipo $q + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, embora não possuam o cotipo q .

1.4.1 Resultados clássicos

A relação entre cotipo e operadores lineares absolutamente somantes é muito forte e pode ser constatada nos trabalhos clássicos de Maurey-Pisier [22] e Talagrand [31]. Essa relação, mesmo no caso linear, ainda vem sendo estudada e, cada vez mais, o papel fundamental do cotipo na teoria de operadores absolutamente somantes vem sendo elucidado (citamos, por exemplo, [6, 9]).

A seguir, listamos alguns resultados clássicos (para referências, sugerimos o excelente livro [14]):

Teorema 1.4.5 (Dvoretzky - Rogers) *Seja X um espaço de Banach. Se $1 \leq p \leq q < \infty$ e $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ então id_X não é $(q; p)$ -somante.*

Não é difícil mostrar que se X tem cotipo finito q , então a identidade id_X é absolutamente $(q, 1)$ -somante. A recíproca é bem mais delicada, e é devida a M. Talagrand:

Teorema 1.4.6 (Talagrand) *Seja X um espaço de Banach. Se $q > 2$ e id_X é $(q, 1)$ -somante então X tem cotipo q .*

Teorema 1.4.7 (Dubinsky - Pełczyński - Rosenthal - Maurey) *Sejam Y um espaço de Banach com cotipo q , com $2 \leq q < \infty$, e K um espaço de Hausdorff compacto.*

(a) *Se $q = 2$, então*

$$\mathcal{L}(C(K); Y) = \mathcal{L}_{as,2}(C(K); Y)$$

(b) *Se $2 < q < \infty$, então*

$$\mathcal{L}(C(K); Y) = \mathcal{L}_{as(p,q)}(C(K); Y) = \mathcal{L}_{as,r}(C(K); Y)$$

para quaisquer $p < q$ e $q < r < \infty$.

Também chamamos de resultados de coincidência àqueles que oferecem igualdades do tipo

$$\mathcal{L}_{as,p}(X; Y) = \mathcal{L}_{as,q}(X; Y)$$

para certos p, q, X e Y .

Teorema 1.4.8 (Maurey) *Sejam X e Y espaços de Banach. As seguintes afirmações são válidas:*

(a) *Se X tem cotipo 2, então*

$$\mathcal{L}_{as,2}(X; Y) = \mathcal{L}_{as,1}(X; Y).$$

(b) *Se X tem cotipo $2 < q < \infty$, então*

$$\mathcal{L}_{as,r}(X; Y) = \mathcal{L}_{as,1}(X; Y)$$

para todo $1 < r < q^$.*

(c) *Se X e Y têm cotipo 2, então*

$$\mathcal{L}_{as,r}(X; Y) = \mathcal{L}_{as,1}(X; Y)$$

para todo $1 < r < \infty$.

1.4.2 Resultados recentes

Recentemente, a seguinte caracterização de resultados de coincidência, para o caso em que Y não tem cotipo finito, foi obtida por G. Botelho e D. Pellegrino [6]:

Teorema 1.4.9 *Sejam Y um espaço de Banach sem cotipo finito e X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então*

(a) $\Pi_{q,p}(X; Y) \neq \mathcal{L}(X; Y)$ se

$$1 \leq q < \cot X \text{ ou } p \geq (\cot X)^*$$

ou

$$1 < p < (\cot X)^* \text{ e } q < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(\cot X)^*} \right)^{-1}.$$

(b) $\Pi_{q,p}(X; Y) = \mathcal{L}(X; Y)$ se

$$p = 1 \text{ e } q > \cot X$$

ou

$$1 < p < (\cot X)^* \text{ e } q > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(\cot X)^*} \right)^{-1}.$$

Para espaços X que assumem o cotipo $\cot X$, ainda em [6], há uma solução mais completa, pois abrange todas as possíveis escolhas de p e q , fornecendo um resultado do tipo “se, e somente se”:

Teorema 1.4.10 *Sejam Y um espaço de Banach sem cotipo finito e X um espaço de Banach de dimensão infinita que assume o cotipo $\cot X$. Então*

$$\mathcal{L}_{as(q,p)}(X; Y) = \mathcal{L}(X; Y)$$

se, e somente se,

$$p = 1 \text{ e } q \geq \cot X$$

ou

$$1 < p < (\cot X)^* \text{ e } q \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(\cot X)^*} \right)^{-1}.$$

Os próximos teoremas aparecem em [9]:

Teorema 1.4.11 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita com $\cot Y > \max\{2, r\}$. Então existe um operador linear compacto de X em Y que não é r -somante.*

Teorema 1.4.12 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita. Sejam $2 \leq r < \cot Y$ e $q \geq r$ tais que*

$$\mathcal{L}_{as(q,r)}(X; Y) = \mathcal{L}(X; Y).$$

Então

$$\mathcal{L}(l_1, l_{\cot Y}) = \mathcal{L}_{as(q,r)}(l_1, l_{\cot Y}).$$

1.5 O Teorema de Lindenstrauss-Pełczyński

Relembremos a definição de base de Schauder de um espaço de Banach:

Definição 1.5.1 *Seja X um espaço de Banach. Uma seqüência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de X se cada $x \in X$ puder ser representado de maneira única como*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j, \quad a_j \in \mathbb{K}. \quad (1.6)$$

Uma base de Schauder é dita incondicional se a convergência em (1.6) for incondicional para todo $x \in X$.

O próximo teorema, devido a Lindenstrauss e Pełczyński (veja [19]), mostra que resultados de coincidência para o espaço dos operadores absolutamente 1-somantes são bastante raros, destacando como o Teorema de Grothendieck é especial:

Teorema 1.5.2 (Lindenstrauss-Pełczyński) *Se X tem base de Schauder incondicional, $\dim X = \dim Y = \infty$ e*

$$\mathcal{L}_{as,1}(X; Y) = \mathcal{L}(X; Y),$$

então X é isomorfo a l_1 e Y é isomorfo a um espaço de Hilbert.

A ideia da demonstração do Teorema de Lindenstrauss e Pełczyński é muito rica e possibilitou muitos resultados novos cujas demonstrações seguem o seu espírito; para tanto, a definição do seguinte parâmetro será bastante útil.

Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita com uma base de Schauder incondicional normalizada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Definimos

$$\mu_{X,(x_n)} = \inf \left\{ t; (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_t \text{ sempre que } x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in X \right\}.$$

Quando $X = c_0, l_1$ ou l_2 , não há perigo de ambiguidades ao escrever simplesmente μ_X , pois toda base incondicional é equivalente à base canônica ([20, Prop. 2.b.9] e [17, Exercício 6.33]). Para $X = l_p$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, quando escrevermos μ_X estaremos considerando a base canônica.

O próximo resultado, cuja demonstração é inspirada nas ideias de Lindenstrauss e Pełczyński, é um caso particular de resultados obtidos por D. Pellegrino em [27] e ilustra uma direção de investigação que será melhor detalhada adiante, no contexto não linear.

Teorema 1.5.3 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita e suponha que X tenha uma base de Schauder incondicional e normalizada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Se $\cot Y < \infty$ e*

$$\mathcal{L}_{as(q,1)}(X;Y) = \mathcal{L}(X;Y),$$

então

- (a) $\mu_{X,(x_n)} \leq \frac{q \cot Y}{\cot Y - q}$ se $q < \cot Y$
- (b) $\mu_{X,(x_n)} \leq q$ se $q \leq \frac{\cot Y}{2}$.

Capítulo 2

Polinômios Absolutamente Somantes

No presente capítulo apresentamos o conceito de aplicações multilineares, polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach. Em seguida exploramos o conceito de polinômios absolutamente somantes e dominados e resultados que serão essenciais para o desenvolvimento do nosso objeto principal de estudo, que será a demonstração de uma conjectura a respeito de resultados de coincidência para polinômios dominados.

2.1 Aplicações Multilineares e Polinômios Homogêneos

Definição 2.1.1 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, \dots, X_m$ e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $A : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ é m -linear (multilinear) se A for linear em cada variável. Mais precisamente, A é m -linear se, para todos $x_1 \in X_1, \dots, x_m \in X_m$ e $i = 1, \dots, m$, os operadores*

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_m) : X_i &\rightarrow Y \\ A(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_m)(y) &= A(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_m) \end{aligned}$$

forem lineares.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos o conjunto de todas as aplicações m -lineares de $X_1 \times \dots \times X_m$ em Y por $L(X_1, \dots, X_m; Y)$ e o conjunto de todas as aplicações m -lineares contínuas de $X_1 \times \dots \times X_m$ em Y é denotado por $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Uma aplicação m -linear é dita simétrica se

$$A(x_1, \dots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$$

para toda bijeção $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$.

Assim como no caso de operadores lineares, as aplicações multilineares contínuas podem ser caracterizadas através de desigualdades. O resultado a seguir apresenta tal caracterização:

Proposição 2.1.2 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, \dots, X_m$ e Y espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$ e $A : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ uma aplicação multilinear. São equivalentes:*

- (i) *A é contínua;*
- (ii) *A é contínua na origem;*
- (iii) *Existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq M \|x_1\| \cdots \|x_m\|$$

para quaisquer $(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$.

Para detalhes da demonstração, sugerimos [4].

Definição 2.1.3 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $P : X \rightarrow Y$ é um polinômio m -homogêneo se existe $A \in L(mX; Y)$ tal que*

$$P(x) = A(x, \dots, x),$$

para todo $x \in X$. O espaço dos polinômios m -homogêneos de X em Y é denotado por $P(mX; Y)$. Pode-se mostrar que sempre existe uma única aplicação m -linear simétrica A_s tal que $P(x) = A_s(x, \dots, x)$. Nesse caso, dizemos que P é o polinômio m -homogêneo associado a A_s e, em geral, A_s é representada por $\check{P}$.

Denotaremos por $\mathcal{P}(mX; Y)$ (ou $\mathcal{P}(mX)$, se $Y = \mathbb{K}$) o espaço de Banach formado por todos os polinômios m -homogêneos contínuos de X em Y com a norma

$$\|P\| := \sup_{\|x\|=1} \|P(x)\|.$$

O resultado a seguir fornece uma caracterização dos polinômios homogêneos contínuos (veja [4]):

Proposição 2.1.4 *Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}(mX; Y)$ e $\check{P} \in \mathcal{L}(mX; Y)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *$\check{P} \in \mathcal{L}(mX; Y)$;*
- (ii) *$P \in \mathcal{P}(mX; Y)$;*
- (iii) *P é contínuo na origem;*
- (iv) *Existe uma constante $M > 0$, tal que*

$$\|P(x)\| \leq M \|x\|^m$$

para qualquer $x \in X$;

O próximo resultado é bastante útil, pois mostra como se pode calcular $\check{P}(x_1, \dots, x_m)$ a partir de P avaliado em certos vetores. Ele será utilizado, por exemplo, na demonstração da Proposição 2.2.5:

Teorema 2.1.5 (Fórmula de Polarização) *Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Se $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$, então $\check{P} \in \mathcal{L}(^m X; Y)$ e*

$$\check{P}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_k = \pm 1 \\ k=1, \dots, m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m),$$

para quaisquer $x_0, x_1, \dots, x_m \in X$.

Observação 2.1.6 *É interessante perceber que na Fórmula de Polarização, o termo x_0 aparece apenas no lado direito da desigualdade e, além disso, é completamente arbitrário.*

Para detalhes da teoria de polinômios e aplicações multilineares entre espaços de Banach, mencionamos [15, 24].

2.2 Polinômios Absolutamente Somantes e Polinômios Dominados

2.2.1 Polinômios Absolutamente Somantes

Definição 2.2.1 *Sejam $0 < p, q < \infty$. Um polinômio m -homogêneo $P : X \rightarrow Y$ é absolutamente (p, q) -somante (ou (p, q) -somante) se $(P(x_j))_{j=1}^\infty \in l_p(Y)$ para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in l_q^w(X)$.*

O espaço de todos os polinômios m -homogêneos absolutamente (p, q) -somantes de X em Y é denotado por $\mathcal{P}_{as(p,q)}(^m X; Y)$ (ou $\mathcal{P}_{as(p,q)}(^m X)$ se $Y = \mathbb{K}$). Quando $m = 1$ temos o conceito original de operadores absolutamente somantes e nesse caso $\mathcal{P}_{as(p,q)}(^1 X; Y)$ é representado por $\mathcal{L}_{as(p,q)}(X; Y)$.

Observação 2.2.2 *É possível provar que se $p < \frac{q}{m}$, então $\mathcal{P}_{as(p,q)}(^m X; Y) = \{0\}$. Assim, a teoria só é interessante se $q \leq pm$. De agora em diante, sempre estará implícito que $q \leq mp$.*

O seguinte resultado, que pode ser encontrado em [21], caracteriza por desigualdades os polinômios absolutamente somantes:

Proposição 2.2.3 *Seja $P \in \mathcal{P}_{as(p,q)}(^m X; Y)$ com $0 < p, q < \infty$. São equivalentes:*

- (i) *P é (p, q) -somante;*
- (ii) *Existe $L > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^n \|P(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{m}{q}}, \quad (2.1)$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_n$ em X e n natural;

(iii) Existe $L > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|P(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{m}{q}}, \quad (2.2)$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$.

O ínfimo das constantes L tais que (2.1) (ou, equivalentemente (2.2)) vale é denotado por $\|P\|_{as(p,q)}$. Se $p < 1$, $\|\cdot\|_{as(p,q)}$ é uma p -norma e, se $p \geq 1$, $\|\cdot\|_{as(p,q)}$ é uma norma em $\mathcal{P}_{as(p,q)}(X; Y)$. Em qualquer dos casos, temos espaços topológicos metrizáveis e completos (veja [21]).

Há várias possíveis generalizações do conceito de operadores absolutamente somantes para aplicações multilineares. A seguir, apresentamos um dos primeiros conceitos não lineares explorados na literatura (veja [2]).

Definição 2.2.4 *Sejam $0 < p, q_1, \dots, q_n \leq \infty$. Uma aplicação multilinear contínua $T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ é absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somante se $(T(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}))_{j=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ sempre que $(x_j^{(s)})_{j=1}^{\infty} \in l_{q_s}^w(X_s)$, $s = 1, \dots, n$.*

Como veremos, a Fórmula de Polarização nos permite provar que P é absolutamente $(p; q)$ -somante se, e somente se, sua multilinear simétrica associada é absolutamente $(p; q, \dots, q)$ -somante.

Proposição 2.2.5 *Um polinômio m -homogêneo $P : X \rightarrow Y$ é absolutamente $(p; q)$ -somante se, e somente se, $\check{P} : X \times \dots \times X \rightarrow Y$ é absolutamente $(p; q, \dots, q)$ -somante.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que P seja absolutamente $(p; q)$ -somante. Sejam $(x_j^{(1)})_{j=1}^{\infty}, \dots, (x_j^{(m)})_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$. Pela Fórmula de Polarização segue que

$$\begin{aligned} (\check{P}(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(m)}))_{j=1}^{\infty} &= \frac{1}{m!2^m} \left(\sum_{\substack{\varepsilon_k = \pm 1 \\ k=1, \dots, m}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \dots + \varepsilon_m x_j^{(m)}) \right)_{j=1}^{\infty} \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_k = \pm 1 \\ k=1, \dots, m}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \left(P(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \dots + \varepsilon_m x_j^{(m)}) \right)_{j=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Note que cada

$$(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \dots + \varepsilon_m x_j^{(m)})_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(X).$$

Assim, como P é $(p; q)$ -somante, segue que cada

$$\left(P(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \dots + \varepsilon_m x_j^{(m)}) \right)_{j=1}^{\infty}$$

pertence a $l_p(Y)$. Como $\frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_k = \pm 1 \\ k=1, \dots, m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m$ é uma soma finita, segue que

$$(\check{P}(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(m)}))_{j=1}^\infty = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_k = \pm 1 \\ k=1, \dots, m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \left(P(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \varepsilon_m x_j^{(m)}) \right)_{j=1}^\infty \in l_p(Y).$$

Portanto, $\check{P}$ é absolutamente $(p; q, \dots, q)$ -somante.

($\Leftarrow$) Considere $(x_j)_{j=1}^\infty \in l_q^w(X)$. Como $\check{P}$ é $(p; q, \dots, q)$ -somante, temos que

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \|P(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^\infty \|\check{P}(x_j, \dots, x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Logo, P é absolutamente $(p; q)$ -somante. ■

2.2.2 Polinômios Dominados

A teoria de polinômios absolutamente $(p; q)$ -somantes apresenta, em geral, pouca relação com a teoria linear. Por exemplo, em geral, não há um Teorema de Inclusão e teoremas de coincidência são muito comuns, ao contrário do que acontece na teoria linear. Por exemplo, é fácil provar que

$$\mathcal{L}(^m l_p; Y) = \mathcal{L}_{as(1;1)}(^m l_p; Y)$$

para todo $m \geq 2$, $1 \leq p \leq 2$ e todo espaço de Banach Y , e isso contrasta fortemente com o Teorema de Grothendieck e o Teorema de Lindenstrauss-Pełczyński da teoria linear.

Além disso, não há um Teorema de Dominação de Pietsch e, em contextos mais específicos da teoria de ideais, o ideal dos polinômios absolutamente somantes, apresenta propriedades indesejáveis. Por exemplo, o multi-ideal das aplicações multilineares absolutamente p -somantes, em geral, não é um tipo de holomorfia.

Entretanto, o caso particular de polinômios m -homogêneos absolutamente $(\frac{r}{m}; r)$ -somantes (chamados de r -dominados) resgata muitas das propriedades da teoria linear como, por exemplo, o Teorema da Dominação de Pietsch e o Teorema de Inclusão. Por essa razão, esse caso particular, tem sido estudado separadamente.

Definição 2.2.6 *Seja $r \geq 1$. Um polinômio m -homogêneo $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ é dito ser r -dominado se ele é $(\frac{r}{m}; r)$ -somante. Nesse caso, escreveremos $\mathcal{P}_{d,r}(^m X; Y)$ (ou $\mathcal{P}_{d,r}(^m X)$ se $Y = \mathbb{K}$) em vez de $\mathcal{P}_{as(\frac{r}{m}; r)}(^m X; Y)$.*

Teorema 2.2.7 (Teorema de Pietsch para Polinômios Dominados) *Seja $1 \leq p < \infty$. Um polinômio m -homogêneo contínuo $P : X \rightarrow Y$ é p -dominado se, e somente se, existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida regular de probabilidade μ nos borelianos de B_{X^*} , tais que*

$$\|P(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{m}{p}}$$

qualquer que seja $x \in X$.

O próximo teorema é consequência imediata do Teorema de Pietsch acima. Basta notar que se $p \leq q$, então $L_q(B_{X^*}, \mu) \subset L_p(B_{X^*}, \mu)$ e $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$.

Teorema 2.2.8 (Teorema de Inclusão para Polinômios Dominados) *Sejam $1 \leq p \leq q$, X e Y espaços de Banach. Então,*

$$\mathcal{P}_{d,p}(^m X; Y) \subset \mathcal{P}_{d,q}(^m X; Y).$$

Conforme veremos a seguir, a noção de polinômios r -dominados se estende ao caso multilinear.

Definição 2.2.9 *Sejam $X_1, \dots, X_m$ espaços de Banach e $A : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ é uma aplicação m -linear contínua. Dizemos que A é r -dominada se $(A(x_j^1, \dots, x_j^m))_{j=1}^\infty \in l_{\frac{r}{m}}(Y)$ sempre $(x_j^k)_{j=1}^\infty \in l_r^w(X_k)$ para cada $k = 1, \dots, m$.*

Para aplicações multilineares dominadas, também há uma versão do Teorema da Dominação de Pietsch:

Teorema 2.2.10 (Teorema de Pietsch para Aplicações Dominadas) *Seja $1 \leq p < \infty$. Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ é p -dominada se, e somente se, existem uma constante $C \geq 0$ e medidas regulares de probabilidade μ_k nos borelianos de $B_{X_k^*}$, $k = 1, \dots, m$, tais que*

$$\|T(x_1, \dots, x_m)\| \leq C \prod_{k=1}^m \left(\int_{B_{X_k^*}} |\varphi_k(x_k)|^p d\mu_k(\varphi_k) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para quaisquer x_k em X_k com $k = 1, \dots, m$.

2.3 Uma conjectura

A teoria de polinômios homogêneos p -dominados entre espaços de Banach tem uma grande importância na teoria não-linear de operadores absolutamente somantes. Ela tem sido investigada por diversos autores (veja, por exemplo, [11, 12, 13, 18, 23]). Uma conjectura dessa teoria, apresentada em [8] diz o seguinte:

Conjectura 2.3.1 *Não existe espaço de Banach X de dimensão infinita tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ e todo $r \geq 1$, todo polinômio m -homogêneo contínuo $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ seja r -dominado.*

Sabe-se que essa conjectura é verdadeira para espaços de Banach com base incondicional (veja [8, Teorema 3.2]). Além disso, sabe-se que a versão multilinear dessa conjectura é verdadeira, mesmo em um contexto mais forte (veja [18]). Pela Proposição 2.2.5, sabemos que um polinômio homogêneo é r -dominado se, e somente se, sua aplicação multilinear simétrica associada também é r -dominada. No entanto, as partes polinomiais e multilineares desse problema são relativamente independentes, como mostra o exemplo seguinte de uma aplicação multilinear que não é p -dominada, cuja aplicação simétrica associada é r -dominada:

Exemplo 2.3.2 *Seja*

$$T : l_2 \times l_2 \rightarrow \mathbb{K}$$

definida por

$$T(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_{j+1} - \sum_{j=1}^{\infty} x_{j+1} y_j.$$

Note que $T(e_j, e_{j+1}) = 1$ para todo j . Então, T não é r -dominada, qualquer que seja $p \geq 1$. Por outro lado, temos que a aplicação simétrica associada a T é zero, pois,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \frac{1}{2} (T(x, y) + T(y, x)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_{j+1} - \sum_{j=1}^{\infty} x_{j+1} y_j + \sum_{j=1}^{\infty} y_j x_{j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} y_{j+1} x_j \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, mesmo sabendo que a conjectura em sua versão multilinear é verdadeira, não é claro que a conjectura original seja verdadeira.

No próximo capítulo apresentaremos uma demonstração da Conjectura 2.3.1 mencionada acima. Os argumentos são retirados de um material não publicado devido a Botelho, Pellegrino e Rueda, cujas ideias estão essencialmente em [9, 10].

Capítulo 3

Variações não-lineares de um argumento de Lindenstrauss e Pełczyński

Neste capítulo, destacaremos alguns resultados recentes de coincidência e não-coincidência para polinômios absolutamente somantes e dominados, e por fim, daremos uma prova para o caso de espaços de Banach sobre o corpo dos reais, da conjectura citada anteriormente.

Como mencionamos anteriormente, a demonstração do Teorema 1.5.2, devido a Lindenstrauss e Pełczyński, tem inspirado vários resultados, tanto da teoria linear quanto no contexto não-linear. Na teoria de polinômios absolutamente somantes, a demonstração do Teorema de Lindenstrauss-Pełczyński, por exemplo, inspirou os seguintes resultados:

Teorema 3.0.3 ([27]) *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita. Suponhamos que X possua uma base de Schauder incondicional normalizada $(x_n)_{n=1}^\infty$ e $\cot Y = \infty$. Se*

$$\mathcal{P}_{as(q;1)}(^mX; Y) = \mathcal{P}(^mX; Y),$$

então

$$\mu_{X,(x_n)} \leq mq.$$

Teorema 3.0.4 ([7]) *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita tais que*

$$\mathcal{P}_{as(q;1)}(^mX; Y) = \mathcal{P}(^mX; Y).$$

Suponha que X possui uma base incondicional normalizada $(x_n)_{n=1}^\infty$. Então

$$\mu_{X,(x_n)} \leq mq$$

se

- (i) $q < 1$ e $\dim Y < \infty$;
- (ii) $q < \cot Y$ e $\dim Y = \infty$.

3.1 Resultados recentes de coincidência para polinômios absolutamente somantes

Os resultados principais da presente estão indicados, sem maiores detalhes, em [9].

Definição 3.1.1 *Seja Y um espaço de Banach. Dizemos que Y fatora finitamente (ff) a inclusão $l_p \hookrightarrow l_\infty$ se existirem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que, para cada n natural, existem $y_1, \dots, y_n \in Y$ tais que*

$$C_1 \| (a_j)_{j=1}^n \|_\infty \leq \| \sum_{j=1}^n a_j y_j \| \leq C_2 \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.1)$$

para quaisquer escalares $a_1, \dots, a_n$. Em outras palavras, existem $r_n : l_p^n \rightarrow [y_1, \dots, y_n]$ e $s_n : [y_1, \dots, y_n] \rightarrow l_\infty^n$ dadas por

$$r_n((a_j)_{j=1}^n) = \sum_{j=1}^n a_j y_j$$

e

$$s_n\left(\sum_{j=1}^n a_j y_j\right) = (a_j)_{j=1}^n,$$

contínuas, para as quais o diagrama abaixo é comutativo e as constantes de continuidade não dependem de n :

$$\begin{array}{ccc} l_p^n & \xrightarrow{i} & l_\infty^n \\ & \searrow r_n & \nearrow s_n \\ & [y_1, \dots, y_n] & \end{array}$$

Teorema 3.1.2 *Seja Y um espaço de Banach e $2 \leq p < \infty$. Suponha que Y fatora finitamente a inclusão $l_p \hookrightarrow l_\infty$. Se $q < p$ e $\mathcal{P}_{as(q;r)}({}^m X; Y) = \mathcal{P}({}^m X; Y)$ então id_X é $\left(\frac{mpq}{p-q}, r\right)$ -somante.*

Demonstração. Como $\mathcal{P}_{as(q;r)}({}^m X; Y) = \mathcal{P}({}^m X; Y)$ e $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{as(q;r)}$ segue que $id : \mathcal{P}_{as(q;r)}({}^m X; Y) \rightarrow \mathcal{P}({}^m X; Y)$ é um operador linear, limitado e bijetivo. Note que o Teorema da Aplicação Aberta é válido mesmo no caso em que $\|\cdot\|_{as(q;r)}$ é uma q -norma. Para detalhes, veja [29]. Assim, pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que id^{-1} é limitado e daí existe $K > 0$ tal que

$$\|P\|_{as(q;r)} \leq K \|P\|$$

para todo polinômio m -homogêneo contínuo $P : X \rightarrow Y$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_n \in X$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existem $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in B_{X^*}$ tais que $\|\varphi_j\| = 1$ e $\varphi_j(x_j) = \|x_j\|$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Sejam $\mu_1, \dots, \mu_n$ escalares tais que $\sum_{j=1}^n |\mu_j|^s = 1$, com $s = \frac{p}{q}$. Definamos $P_n : X \rightarrow Y$ por

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^n |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x)^m y_j,$$

para todo $x \in X$.

Note que P_n é contínuo e sua norma não depende de n , pois dado $x \in X$,

$$\begin{aligned} \|P_n(x)\| &= \left\| \sum_{j=1}^n |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x)^m y_j \right\| \\ &\leq C_2 \left(\sum_{j=1}^n \left| |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x)^m \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_2 \left(\sum_{j=1}^n \left| |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \|\varphi_j\|^m \|x\|^m \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_2 \left(\sum_{j=1}^n \left| |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \|x\|^m \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_2 \left(\sum_{j=1}^n |\mu_j|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \|x\|^m \\ &= C_2 \|x\|^m. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|P\|_{as(q;r)} \leq K \|P\| = K \sup_{\|x\|=1} \|P_n(x)\| \leq K C_2 := K_1.$$

Note que, para $k = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned} \|P_n(x_k)\| &= \left\| \sum_{j=1}^n |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x_k)^m y_j \right\| \\ &\geq C_1 \left\| (|\mu_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x_k)^m)_{j=1}^n \right\|_{\infty} \\ &= C_1 \sup_{j=1, \dots, n} \left\{ |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x_k)^m \right\} \\ &= C_1 |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x_k)^m \\ &= C_1 |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \|x_k\|^m. \end{aligned}$$

Assim, obtemos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^{mq} |\mu_j| \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^n (\|x_j\|^m |\mu_j|^{\frac{1}{q}})^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C_1^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \|P(x_j)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C_1^{-1} \|P\|_{as(q;r)} (\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,r})^m.
\end{aligned}$$

Note que a desigualdade acima é válida sempre que $\sum_{j=1}^n |\mu_j|^s = 1$. Como $\frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{s}{s-1}} = 1$ e $l_s^n = \left(l_{\frac{s}{s-1}}^n\right)^*$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\|(\|x_j\|^{mq})_{j=1}^n\|_{\frac{s}{s-1}} &= \left(\sum_{j=1}^n (\|x_j\|^{\frac{s}{s-1}mq}) \right)^{\frac{1}{\frac{s}{s-1}}} \\
&= \sup_{\varphi \in B\left(l_{\frac{s}{s-1}}^n\right)^*} |\varphi(\|x_j\|^{mq})_{j=1}^n| \\
&= \sup_{(\mu_j)_{j=1}^n \in B_{l_s^n}} \left| \sum_{j=1}^n \mu_j \|x_j\|^{mq} \right| \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n \mu_j \|x_j\|^{mq} \right| : \sum_{j=1}^n |\mu_j|^s = 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\mu_j| \|x_j\|^{mq} : \sum_{j=1}^n |\mu_j|^s = 1 \right\} \\
&\leq (C_1^{-1} \|P\|_{as(q;r)} (\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,r})^m)^q \\
&\leq (C_1^{-1} K_1 (\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,r})^m)^q.
\end{aligned}$$

Logo

$$\left(\sum_{j=1}^n (\|x_j\|^{\frac{s}{s-1}mq}) \right)^{\frac{1}{(\frac{s}{s-1})mq}} \leq (C_1^{-1} K_1)^{\frac{1}{m}} (\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,r}).$$

Como $\frac{s}{s-1}mq = \frac{mpq}{p-q}$, n e $x_1, \dots, x_n \in X$ são arbitrários, segue que id_X é $\left(\frac{mpq}{p-q}, r\right)$ -somante. $\blacksquare$

A próxima definição mantém a simbologia introduzida no trabalho clássico de Maurey e Pisier [22]:

Definição 3.1.3 *Dado um espaço de Banach X , definimos:*

$$\begin{aligned}
r_X &:= \sup\{2 \leq p \leq \infty : X \text{ fatora finitamente a inclusão formal } l_p \hookrightarrow l_\infty\} \\
s_X &:= \inf\{2 \leq p \leq \infty : id_X \in \mathcal{L}_{as(p,1)}(X, X)\}
\end{aligned}$$

com $r_X, s_X \in [2, \infty]$.

O próximo teorema, devido a Maurey e Pisier, mostra que os parâmetros r_X e s_X coincidem e, além disso, são iguais a $\cot X$. Note que o Teorema de Talagrand (Teorema 1.4.6) traz informações mais precisas que a igualdade $\cot X = s_X$.

Teorema 3.1.4 (Maurey-Pisier) *Para todo espaço de Banach de dimensão infinita X ,*

$$\cot X = r_X = s_X.$$

A partir do Teorema de Maurey-Pisier e do teorema 3.1.2, seguem imediatamente alguns resultados:

Corolário 3.1.5 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita e $p, q > 0$ tais que $\cot Y = p > q$. Se*

$$\mathcal{P}_{as(q;r)}(^mX; Y) = \mathcal{P}(^mX; Y),$$

então id_X é $\left(\frac{mpq}{p-q}; r\right)$ -somante.

Demonstração. Temos $p > q$ e $\mathcal{P}_{as(q;r)}(^mX; Y) = \mathcal{P}(^mX; Y)$. Como $\cot Y = p$ então o Teorema de Maurey-Pisier garante que $r_Y = p$. Mas, por [14], sabemos que o supremo é atingido. Logo Y fatora finitamente a inclusão formal $l_p \hookrightarrow l_\infty$. Assim, pelo Teorema 3.1.2, segue que id_X é $\left(\frac{mpq}{p-q}; r\right)$ -somante. ■

Corolário 3.1.6 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita e $p, q > 0$ tal que $\cot Y = p > q$. Se*

$$\frac{mpq}{p-q} > 2$$

e $\mathcal{P}_{as(q;1)}(^mX; Y) = \mathcal{P}(^mX; Y)$, então X tem cotipo $\frac{mpq}{p-q}$.

Demonstração. Pelo Corolário 3.1.5 com $r = 1$, temos que id_X é $\left(\frac{mpq}{p-q}, 1\right)$ -somante. Por hipótese,

$$\frac{mpq}{p-q} > 2.$$

Daí, pelo Teorema 1.4.6, concluímos que X tem cotipo $\frac{mpq}{p-q}$. ■

Corolário 3.1.7 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita. Se Y não tem cotipo finito e*

$$\mathcal{P}_{as(q;1)}(^mX; Y) = \mathcal{P}(^mX; Y),$$

então $\cot X \leq mq$.

Demonstração. Como $\cot Y = \infty$, podemos usar p , na definição anterior, arbitrariamente grande. Do Teorema 3.1.2 temos que id_X é $\left(\frac{mpq}{p-q}, 1\right)$ -somante com $q < p$ e p arbitrariamente grande.

Note que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{mpq}{p-q} = mq.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, $\exists p_\epsilon$ tal que

$$\frac{mp_\epsilon q}{p_\epsilon - q} < mq + \epsilon.$$

Como id_X é $\left(\frac{mp_\epsilon q}{p_\epsilon - q}, 1\right)$ -somante, segue que id_X é $(mq + \epsilon, 1)$ -somante. Logo

$$mq + \epsilon \geq 2$$

para todo $\epsilon > 0$. Daí concluímos que $mq \geq 2$ e, pelo Teorema 3.1.4, obtemos

$$\cot X \leq mq.$$

■

Observação 3.1.8 O Teorema 3.0.3 mostra que, sob as hipóteses do Corolário 3.1.7, e se X tem base incondicional normalizada $(x_n)_{n=1}^\infty$, temos

$$\mu_{X, (x_n)} \leq mq.$$

O Corolário 3.1.7 melhora o Teorema 3.0.3 em dois sentidos: primeiro, uma base de Schauder não é usada no corolário e, segundo, se X tem uma base de Schauder incondicional, a conclusão $\cot X \leq mq$ do Corolário 3.1.7 é mais forte que a conclusão $\mu_{X, (x_n)} \leq mq$ do Teorema 3.0.3. De fato, se $\cot X \leq mq$ e X tem base incondicional, então id_X é $(mq + \epsilon, 1)$ -somante $\forall \epsilon > 0$. Daí, segue que $\mu_{X, (x_n)} \leq mq$.

Proposição 3.1.9 Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita e

$$q < \cot Y = p.$$

Então:

(a) $\mathcal{P}_{as(q;r)}(^m X; Y) \neq \mathcal{P}(^m X; Y)$, se

$$r > \frac{2mpq}{mpq + 2p - 2q},$$

(b) $\mathcal{P}_{as(q;r)}(^m X; Y) \neq \mathcal{P}(^m X; Y)$, se $r \geq 2$. Em particular,

$$\mathcal{P}_{as(q;r)}(^m X; Y) \neq \mathcal{P}(^m X; Y)$$

para todo $r \geq 2$, se $\cot Y = \infty$.

Demonstração. (a) Suponha que $\mathcal{P}_{as(q;r)}({}^mX; Y) = \mathcal{P}({}^mX; Y)$. Daí, pelo Corolário 3.1.5, temos que id_X é $\left(\frac{mpq}{p-q}, r\right)$ -somante. Como $id_X \neq 0$, segue que

$$r \leq \frac{mpq}{p-q}.$$

Usando o Teorema 1.4.5, temos

$$\frac{1}{r} - \frac{p-q}{mpq} \geq \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$r \leq \frac{2mpq}{mpq + 2p - 2q},$$

o que é uma contradição.

(b) Suponha que $\mathcal{P}_{as(q;r)}({}^mX; Y) = \mathcal{P}({}^mX; Y)$. Novamente, usando o Corolário 3.1.5, segue que id_X é $\left(\frac{mpq}{p-q}, 2\right)$ -somante, pois $r \geq 2$. E daí, como $id_X \neq 0$, temos

$$\frac{mpq}{p-q} \geq 2.$$

Mas, pelo Teorema 1.4.5, temos que id_X não pode ser absolutamente $(s, 2)$ -somante para $s \geq 2$ algum. ■

Como mostra o resultado a seguir, os resultados anteriores têm consequências interessantes, inclusive, no caso linear:

Teorema 3.1.10 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita. Se $r \geq 2$ e $q < \cot Y$ então*

$$\mathcal{L}_{as(q;r)}(X; Y) \neq \mathcal{L}(X; Y).$$

Em particular, se $r \geq 1$ e $\cot Y > \max\{2, r\}$ então

$$\mathcal{L}_{as,r}(X; Y) \neq \mathcal{L}(X; Y).$$

Demonstração. Pela Proposição 3.1.9, item (b) temos que se $r \geq 2$ então

$$\mathcal{P}_{as(q;r)}({}^mX; Y) \neq \mathcal{P}({}^mX; Y).$$

Assim, fazendo $m = 1$ segue que

$$\mathcal{L}_{as(q;r)}(X; Y) \neq \mathcal{L}(X; Y)$$

e a primeira afirmação do teorema está demonstrada. Para a demonstração da segunda afirmação, consideraremos dois casos:

1º caso: $r \geq 2$. Como $\cot Y > \max\{2, r\}$ então $\cot Y > r$. Fazendo $q = r$ na primeira afirmação do teorema temos

$$\mathcal{L}_{as,r}(X; Y) \neq \mathcal{L}(X; Y).$$

2º caso: $1 \leq r < 2$. Nesse caso, $\cot Y > 2$. Pelo que já foi provado, segue que

$$\mathcal{L}_{as,2}(X;Y) \neq \mathcal{L}(X;Y)$$

e daí, pelo Teorema de Inclusão, concluímos

$$\mathcal{L}_{as,r}(X;Y) \subset \mathcal{L}_{as,2}(X;Y) \neq \mathcal{L}(X;Y).$$

■

Observação 3.1.11 *Relembremos o famoso Teorema de Grothendieck:*

$$\mathcal{L}_{as,1}(l_1; l_2) = \mathcal{L}(l_1; l_2).$$

Note que o Teorema 3.1.10, em geral, não pode ser melhorado (isto é, não se pode trocar $>$ por $\geq$) para espaços Y com cotipo 2. De fato, o teorema não vale para $X = l_1$, $Y = l_2$ (que tem cotipo 2) e $r = 1$.

Corolário 3.1.12 *Se X e Y são espaços de dimensão infinita e*

$$\mathcal{L}_{as,r}(X;Y) = \mathcal{L}(X;Y)$$

para algum $1 \leq r < 2$ então $\cot Y = 2$.

Demonstração. Se fosse $\cot Y > 2$, teríamos

$$\cot Y > 2 = \max\{2, r\},$$

e o Teorema 3.1.10 implicaria que

$$\mathcal{L}_{as,r}(X;Y) \neq \mathcal{L}(X;Y).$$

Logo, $\cot Y = 2$. ■

O próximo corolário é uma simples consequência dos resultados anteriores. Ele será destacado apenas para tornar mais clara a Observação 3.1.14.

Corolário 3.1.13 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita com $\cot Y < \infty$. Então:*

(a)

$$\mathcal{L}_{as(q;1)}(X;Y) \neq \mathcal{L}(X;Y) \text{ para todo } q < \frac{2 \cot Y}{2 + \cot Y}.$$

(b)

$$\mathcal{L}_{as(q;2)}(X;Y) \neq \mathcal{L}(X;Y) \text{ para todo } q < \cot Y.$$

Demonstração. (a) Como claramente

$$\frac{2 \cot Y}{2 + \cot Y} < \cot Y$$

e, por hipótese,

$$q < \frac{2 \cot Y}{2 + \cot Y}$$

segue que

$$q < \cot Y.$$

Assim, fazendo $m = r = 1$ na Proposição 3.1.9 (a), temos que

$$\mathcal{L}_{as(q;1)}(X;Y) \neq \mathcal{L}(X;Y)$$

sempre que

$$\frac{2q \cot Y}{q \cot Y + 2 \cot Y - 2q} < 1,$$

ou seja,

$$q < \frac{2 \cot Y}{2 + \cot Y}.$$

(b) Pelo Teorema 3.1.10 temos que se $r \geq 2$ e $q < \cot Y$ então

$$\mathcal{L}_{as(q;r)}(X;Y) \neq \mathcal{L}(X;Y).$$

Logo, fazendo $r = 2$, segue que

$$\mathcal{L}_{as(q;2)}(X;Y) \neq \mathcal{L}(X;Y)$$

para todo $q < \cot Y$. ■

Observação 3.1.14 Para $Y = l_p$, com $2 \leq p < \infty$ e $X = l_1$, de [3] sabemos que

$$\mathcal{L}_{as(\frac{2p}{2+p},1)}(l_1;l_p) = \mathcal{L}(l_1;l_p)$$

e isso mostra que o resultado anterior em geral não vale para

$$q = \frac{2 \cot Y}{2 + \cot Y}.$$

3.2 Resultados de coincidência para polinômios dominados

Começamos a presente seção com uma série de lemas, que podem ser encontrados em [26].

Definição 3.2.1 *Sejam $X_1, \dots, X_n$ e Y espaços de Banach. Definimos, para cada $k = 1, \dots, n-1$,*

$$\psi_k : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y) \rightarrow \mathcal{L}(X_1, \dots, X_k; \mathcal{L}(X_{k+1}, \dots, X_n; Y))$$

por

$$\psi_k(T)(x_1, \dots, x_k)(x_{k+1}, \dots, x_n) = T(x_1, \dots, x_n).$$

Não é difícil mostrar que ψ_k é uma isometria.

Lema 3.2.2 *Se*

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y) = \mathcal{L}_{as(r; s_1, \dots, s_t, \infty, \dots, \infty)}(X_1, \dots, X_n; Y),$$

então

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_t; \mathcal{L}(X_{t+1}, \dots, X_n; Y)) = \mathcal{L}_{as(r; s_1, \dots, s_t)}(X_1, \dots, X_t; \mathcal{L}(X_{t+1}, \dots, X_n; Y))$$

e vice versa.

Demonstração. Suponha

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y) = \mathcal{L}_{as(r; s_1, \dots, s_t, \infty, \dots, \infty)}(X_1, \dots, X_n; Y).$$

Considere $T : X_1 \times \dots \times X_t \rightarrow \mathcal{L}(X_{t+1}, \dots, X_n; Y)$ uma aplicação multilinear contínua. Temos que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T(x_1^{(j)}, \dots, x_t^{(j)}) \right\|^r \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\substack{\|y_k\| \leq 1 \\ k=t+1, \dots, n}} \left\| T(x_1^{(j)}, \dots, x_t^{(j)})(y_{t+1}, \dots, y_n) \right\|^r \right)^{\frac{1}{r}} = (*).$$

Para cada j existem $y_{t+1}^{(j)} \in B_{X_{t+1}^*}, \dots, y_n^{(j)} \in B_{X_n^*}$ tais que

$$\begin{aligned} (*) &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T(x_1^{(j)}, \dots, x_t^{(j)})(y_{t+1}^{(j)}, \dots, y_n^{(j)}) \right\|^r + \frac{1}{2^j} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \psi_t^{-1}(T)(x_1^{(j)}, \dots, x_t^{(j)}, y_{t+1}^{(j)}, \dots, y_n^{(j)}) \right\|^r + \frac{1}{2^j} \right)^{\frac{1}{r}} < \infty \end{aligned}$$

sempre que $(x_1^{(j)})_{j=1}^{\infty} \in l_{s_1}^w(X_1), \dots, (x_t^{(j)})_{j=1}^{\infty} \in l_{s_t}^w(X_t)$. Logo

$$T \in \mathcal{L}_{as(r; s_1, \dots, s_t)}(X_1, \dots, X_t; \mathcal{L}(X_{t+1}, \dots, X_n; Y)).$$

Reciprocamente, suponha

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_t; \mathcal{L}(X_{t+1}, \dots, X_n; Y)) = \mathcal{L}_{as(r; s_1, \dots, s_t)}(X_1, \dots, X_t; \mathcal{L}(X_{t+1}, \dots, X_n; Y)).$$

Novamente, considere $T : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$ uma aplicação multilinear contínua. Assim, para $(x_l^{(j)})_{j=1}^\infty \in l_{s_l}^w(X_l)$ e $(y_i^{(j)})_{j=1}^\infty \in l_\infty^w(X_i)$, $l = 1, \dots, t$, $i = t+1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| T(x_1^{(j)}, \dots, x_t^{(j)}, y_{t+1}^{(j)}, \dots, y_n^{(j)}) \right\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| \psi_t(T)(x_1^{(j)}, \dots, x_t^{(j)})(y_{t+1}^{(j)}, \dots, y_n^{(j)}) \right\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| \psi_t(T)(x_1^{(j)}, \dots, x_t^{(j)}) \right\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \left\| (y_{t+1}^{(j)})_{j=1}^\infty \right\|_\infty \cdots \left\| (y_n^{(j)})_{j=1}^\infty \right\|_\infty \\
&\leq \|\psi_t(T)\|_{as(r; s_1, \dots, s_t)} \left(\prod_{l=1}^t \left\| (x_l^{(j)})_{j=1}^\infty \right\|_{w, s_l} \right) \left\| (y_{t+1}^{(j)})_{j=1}^\infty \right\|_\infty \cdots \left\| (y_n^{(j)})_{j=1}^\infty \right\|_\infty \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $T \in \mathcal{L}_{as(r; s_1, \dots, s_t, \infty, \dots, \infty)}(X_1, \dots, X_n; Y)$. ■

Lema 3.2.3 *Se uma aplicação bilinear contínua $T : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ é p -dominada, então T é $(r; r, \infty)$ -somante para cada $r \geq p$.*

Demonstração. Como $T : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ é p -dominada, pelo Teorema de Dominação de Grothendieck-Pietsch temos

$$\begin{aligned}
\|\psi_1(T)(x)\| &= \sup_{\|y\| \leq 1} \|\psi_1(T)(x)(y)\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|T(x, y)\| \\
&\leq \sup_{\|y\| \leq 1} C \left(\int_{B_{X_1^*}} |\varphi_1(x)|^p d\mu_1(\varphi_1) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{X_2^*}} |\varphi_2(y)|^p d\mu_2(\varphi_2) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{B_{X_1^*}} |\varphi_1(x)|^p d\mu_1(\varphi_1) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{B_{X_1^*}} |\varphi_1(x)|^r d\mu_1(\varphi_1) \right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Logo $\psi_1(T)$ é $(r; r)$ -somante e, pelo Lema 3.2.2, segue que, $T = \psi_1^{-1}(\psi_1(T))$ é $(r; r, \infty)$ -somante. ■

A ideia do lema anterior pode ser usada para provar o seguinte:

Lema 3.2.4 *Se uma aplicação n -linear contínua $T : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$ é p -dominada, então T é $(\frac{r}{n-1}; r, \dots, r, \infty)$ -somante para cada $r \geq p$. Além disso,*

$$\mathcal{L}_{as(\frac{p}{n-1}; p, \dots, p, \infty)}(X_1, \dots, X_n; Y) \subset \mathcal{L}_{as(\frac{r}{n-1}; r, \dots, r, \infty)}(X_1, \dots, X_n; Y).$$

Lema 3.2.5 *Se*

$$\mathcal{L}(^2X; Y) = \mathcal{L}_{d,r}(^2X; Y),$$

então

$$\mathcal{L}_{as,r}(X; \mathcal{L}(X; Y)) = \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)).$$

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))$. Então,

$$\psi_1^{-1}(T) \in \mathcal{L}(^2X; Y) = \mathcal{L}_{d,r}(^2X; Y).$$

Pelo Lema 3.2.4,

$$\psi_1^{-1}(T) \in \mathcal{L}_{as(r;r,\infty)}(^2X; Y).$$

Agora, pelo Lema 3.2.2 segue que

$$T = \psi_1(\psi_1^{-1}(T)) \in \mathcal{L}_{as(r;r)}(X; \mathcal{L}(X; Y)).$$

Logo

$$\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)) \subset \mathcal{L}_{as(r;r)}(X; \mathcal{L}(X; Y))$$

e temos, portanto,

$$\mathcal{L}_{as,r}(X; \mathcal{L}(X; Y)) = \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)).$$

■

A partir dos resultados anteriores, é fácil obter o seguinte resultado de não-coincidência para aplicações multilineares dominadas.

Proposição 3.2.6 *Se $\cot X^* > 2$, então*

$$\mathcal{L}_{d,r}(^2X) \neq \mathcal{L}(^2X)$$

sempre que $1 \leq r < \cot X^$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{L}_{d,r}(^2X) = \mathcal{L}(^2X)$ para algum $1 \leq r < \cot X^*$. Pelo lema anterior,

$$\mathcal{L}_{as,r}(X; \mathcal{L}(X; \mathbb{K})) = \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; \mathbb{K})).$$

Como, por hipótese, $\cot X^* > 2$, temos que $\cot X^* > \max\{2, r\}$. Pelo Teorema 3.1.10, temos

$$\mathcal{L}_{as,r}(X; \mathcal{L}(X; \mathbb{K})) \neq \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; \mathbb{K}))$$

sempre que $\cot X^* > \max\{2, r\}$ e o resultado segue. ■

Corolário 3.2.7 *Se X e Y são espaços de Banach de dimensão infinita, então*

$$\mathcal{P}_{d,r}(^mX; Y) \neq \mathcal{P}(^mX; Y)$$

para todo $r < m \cot Y$ e $m \geq 2$.

Demonstração. Suponha $\cot Y = p > q$. Pela Proposição 3.1.9 (b) temos que

$$\mathcal{P}_{as(q;r)}(^mX; Y) \neq \mathcal{P}(^mX; Y)$$

para $r \geq 2$.

Logo, fazendo $q = \frac{r}{m}$ segue que

$$\mathcal{P}_{d,r}(^mX; Y) \neq \mathcal{P}(^mX; Y)$$

para $r \geq 2$.

Para o caso $1 \leq r < 2$ segue do Teorema de Inclusão que

$$\mathcal{P}_{d,r}(^mX; Y) \subset \mathcal{P}_{d,2}(^mX; Y) \neq \mathcal{P}(^mX; Y).$$

Logo,

$$\mathcal{P}_{d,r}(^mX; Y) \neq \mathcal{P}(^mX; Y).$$

■

O próximo corolário que obteremos necessita de um famoso resultado de coincidência devido a A. Defant e J. Voigt. Esse resultado apareceu, pela primeira vez no trabalho de R. Alencar e M. Matos [2], com o devido crédito a Defant e Voigt.

Teorema 3.2.8 (Teorema de Defant-Voigt) *Se $m \geq 1$ e X é um espaço de Banach, então*

$$\mathcal{P}_{as(1;1)}(^mX) = \mathcal{P}(^mX).$$

Uma simples combinação do Corolário 3.1.6 e [5, Teorema 2.2 (ii)] fornece a seguinte extensão de [27].

Corolário 3.2.9 *Sejam X um espaço de Banach tal que $\cot X = \infty$ e Y um espaço de Banach de dimensão infinita que assume o cotipo $\cot Y$. Então*

$$\mathcal{P}_{as(q;1)}(^mX; Y) = \mathcal{P}(^mX; Y) \iff q \geq \cot Y.$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha $\cot Y = p > q$. Daí, pelo Corolário 3.1.5, id_X é $\left(\frac{mpq}{p-q}, 1\right)$ -somante, o que é absurdo em virtude do Teorema de Maurey-Pisier, pois $\cot X = \infty$.

$(\Leftarrow)$ Por hipótese, $\cot Y \leq q$ e Y assume o ínfimo dos seus cotipos. Então, id_Y é $(q, 1)$ -somante. Assim, usando o Teorema de Defant-Voigt e o Teorema da Aplicação Aberta

(TAA), existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^k \|P(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \|id_Y\|_{as(q,1)} \left\| (P(x_j))_{j=1}^k \right\|_{w,1} \\
&= \|id_Y\|_{as(q,1)} \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \sum_{j=1}^k |\varphi(P(x_j))| \\
&= \|id_Y\|_{as(q,1)} \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \sum_{j=1}^k |(\varphi \circ P)(x_j)| \\
&\stackrel{\text{Teorema 3.2.8}}{\leq} \|id_Y\|_{as(q,1)} \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|\varphi \circ P\|_{as(1,1)} \left\| (x_j)_{j=1}^k \right\|_{w,1}^n \\
&\stackrel{\text{TAA}}{\leq} \|id_Y\|_{as(q,1)} \sup_{\|\varphi\| \leq 1} C \|\varphi \circ P\| \left\| (x_j)_{j=1}^k \right\|_{w,1}^n \\
&\leq C \|id_Y\|_{as(q,1)} \|P\| \left\| (x_j)_{j=1}^k \right\|_{w,1}^n.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{P}_{as(q;1)}(^mX; Y) = \mathcal{P}(^mX; Y).$$

■

3.3 A demonstração da conjectura

Nessa seção, vamos mostrar que a Conjectura 2.3.1 é verdadeira para espaços de Banach sobre o corpo dos reais. A demonstração se dará basicamente em duas etapas. Primeiro, demonstraremos um resultado similar ao Teorema 3.1.2 com $Y = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ e m par; o segundo passo é estender este resultado para o caso de inteiros ímpares.

Teorema 3.3.1 *Sejam m um inteiro positivo par e X um espaço de Banach real de dimensão infinita. Se $q < 1$ e $\mathcal{P}_{as(q;r)}(^mX) = \mathcal{P}(^mX)$ então id_X é $\left(\frac{mq}{1-q}, r\right)$ -somante.*

Demonstração. Como $\mathcal{P}_{as(q;r)}(^mX) = \mathcal{P}(^mX)$ e como

$$\|Q\| \leq \|Q\|_{as(q;r)}$$

para todo $Q \in \mathcal{P}_{as(q;r)}(^mX)$, segue que

$$id : \mathcal{P}_{as(q;r)}(^mX) \rightarrow \mathcal{P}(^mX)$$

é um operador linear, limitado e bijetivo. Assim, pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que id^{-1} é limitado e existe $K > 0$ tal que

$$\|Q\|_{as(q;r)} \leq K \|Q\|,$$

para todo polinômio m -homogêneo contínuo $Q : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_n \in X$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existem $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in B_{X^*}$ tais que $\|\varphi_j\| = 1$ e $\varphi_j(x_j) = \|x_j\|$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Sejam $\mu_1, \dots, \mu_n$ números reais tais que $\sum_{j=1}^n |\mu_j|^s = 1$, com $s = \frac{1}{q}$.

Definamos, para cada n natural, $P_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^n |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x)^m.$$

Note que, como m é par, temos $P_n(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ e

$$|P_n(x)| = P_n(x) \geq |\mu_k|^{\frac{1}{q}} \varphi_k(x)^m,$$

para todo $x \in X$ e todo $k = 1, \dots, n$.

Além disso, P_n é contínuo e sua norma não depende de n , pois dado $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} |P_n(x)| &= \left| \sum_{j=1}^n |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x)^m \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x)^m \right| \\ &= \sum_{j=1}^n |\mu_j|^{\frac{1}{q}} |\varphi_j(x)^m| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \|\varphi_j\|^m \|x\|^m \\ &= \|x\|^m \sum_{j=1}^n |\mu_j|^{\frac{1}{q}} \\ &= \|x\|^m. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|P_n\|_{as(q;r)} \leq K \|P_n\| = K \sup_{\|x\|=1} \|P_n(x)\| \leq K \sup_{\|x\|=1} \|x\|^m = K.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^{mq} |\mu_j| \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^n (\|x_j\|^m |\mu_j|^{\frac{1}{q}})^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n \|P_n(x_j)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|P_n\|_{as(q;r)} (\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,r})^m. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Note que a desigualdade acima é válida sempre que $\sum_{j=1}^n |\mu_j|^s = 1$.

Como $\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} = 1$ e $l_s^n = \left(l_{\frac{s}{s-1}}^n\right)^*$ temos:

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\|x_j\|^{mq} \right)_{j=1}^n \right\|_{\frac{s}{s-1}} &= \left(\sum_{j=1}^n \left(\|x_j\|^{\frac{s}{s-1}mq} \right) \right)^{\frac{1}{\frac{s}{s-1}}} \\
&= \sup_{\varphi \in B\left(l_{\frac{s}{s-1}}^n\right)^*} \left| \varphi \left(\left(\|x_j\|^{mq} \right)_{j=1}^n \right) \right| \\
&= \sup_{(\mu_j)_{j=1}^n \in B_{l_s^n}} \left| \sum_{j=1}^n \mu_j \|x_j\|^{mq} \right| \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n \mu_j \|x_j\|^{mq} \right| ; \sum_{j=1}^n |\mu_j|^s = 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\mu_j| \|x_j\|^{mq} ; \sum_{j=1}^n |\mu_j|^s = 1 \right\} \\
&\stackrel{(3.2)}{\leq} \|P_n\|_{as(q;r)}^q \left(\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,r} \right)^{mq} \\
&\leq K^q \left(\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,r} \right)^{mq}.
\end{aligned}$$

Segue, portanto, que

$$\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^{\frac{s}{s-1}mq} \right)^{\frac{1}{\left(\frac{s}{s-1}\right)^{mq}}} \leq K^{\frac{1}{m}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,r}.$$

Como $\frac{s}{s-1}mq = \frac{mq}{1-q}$, n e $x_1, \dots, x_n \in X$ são arbitrários, segue que id_X é $\left(\frac{mq}{1-q}, r\right)$ -somante. $\blacksquare$

Os próximos dois lemas serão essenciais para a demonstração da conjectura:

Proposição 3.3.2 *Se $P : X \rightarrow Y$ é um polinômio n -homogêneo p -dominado então, para quaisquer vetores $a_1, \dots, a_r$ fixos, a aplicação multilinear*

$$\check{P}_{a_1, \dots, a_r}(x_{r+1}, \dots, x_n) := \check{P}(a_1, \dots, a_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$$

é p -dominada. Analogamente, se $T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ é n -linear p -dominada, então

$$T_{a_1, \dots, a_r}(x_{r+1}, \dots, x_n) := T(a_1, \dots, a_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$$

é p -dominada.

Demonstração. Começemos pelo caso de uma aplicação n -linear p -dominada $T : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$. Pelo Teorema da Dominação de Pietsch temos

$$\begin{aligned}
& \|T_{a_1, \dots, a_r}(x_{r+1}, \dots, x_n)\| = \|T(a_1, \dots, a_r, x_{r+1}, \dots, x_n)\| \\
& \leq C \left(\int_{B_{X_1^*}} |\varphi_1(a_1)|^p d\mu_1(\varphi_1) \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\int_{B_{X_r^*}} |\varphi_r(a_r)|^p d\mu_r(\varphi_r) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \cdot \left(\int_{B_{X_{r+1}^*}} |\varphi_{r+1}(x_{r+1})|^p d\mu_{r+1}(\varphi_{r+1}) \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\int_{B_{X_n^*}} |\varphi_n(x_n)|^p d\mu_n(\varphi_n) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq C \left(\int_{B_{X_1^*}} \|\varphi_1\|^p \|a_1\|^p d\mu_1(\varphi_1) \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\int_{B_{X_r^*}} \|\varphi_r\|^p \|a_r\|^p d\mu_r(\varphi_r) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \cdot \left(\int_{B_{X_{r+1}^*}} |\varphi_{r+1}(x_{r+1})|^p d\mu_{r+1}(\varphi_{r+1}) \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\int_{B_{X_n^*}} |\varphi_n(x_n)|^p d\mu_n(\varphi_n) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq C \left(\int_{B_{X_1^*}} 1 \cdot \|a_1\|^p d\mu_1(\varphi_1) \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\int_{B_{X_r^*}} 1 \cdot \|a_r\|^p d\mu_r(\varphi_r) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \cdot \left(\int_{B_{X_{r+1}^*}} |\varphi_{r+1}(x_{r+1})|^p d\mu_{r+1}(\varphi_{r+1}) \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\int_{B_{X_n^*}} |\varphi_n(x_n)|^p d\mu_n(\varphi_n) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq C \|a_1\|^p \mu_1(B_{X_1^*}) \cdots \|a_r\|^p \mu_r(B_{X_r^*}) \\
& \cdot \left(\int_{B_{X_{r+1}^*}} |\varphi_{r+1}(x_{r+1})|^p d\mu_{r+1}(\varphi_{r+1}) \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\int_{B_{X_n^*}} |\varphi_n(x_n)|^p d\mu_n(\varphi_n) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = C_1 \left(\int_{B_{X_{r+1}^*}} |\varphi_{r+1}(x_{r+1})|^p d\mu_{r+1}(\varphi_{r+1}) \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\int_{B_{X_n^*}} |\varphi_n(x_n)|^p d\mu_n(\varphi_n) \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema da Dominação de Pietsch, $T_{a_1, \dots, a_r}$ é p -dominada.

Consideremos, agora, o caso de um polinômio n -homogêneo p -dominado $P : X \rightarrow Y$. Então, sabemos que $\tilde{P}$ é p -dominado. Pelo que acabamos de demonstrar, segue que $\tilde{P}_{a_1, \dots, a_r}$ é p -dominado. $\blacksquare$

Lema 3.3.3 *Sejam $p \geq 1$ e $m \in \mathbb{N}$. Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Se*

$$\mathcal{P}_{d,p}(^n X; Y) = \mathcal{P}(^n X; Y)$$

então

$$\mathcal{P}_{d,p}(^m X; Y) = \mathcal{P}(^m X; Y)$$

para cada $m \leq n$.

Demonstração. Para $m = 1$, considere $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear contínua qualquer. Defina $P : X \rightarrow Y$ por

$$P(x) = \varphi(x)^{n-1}T(x),$$

onde φ é um funcional linear contínuo não nulo. Então, por hipótese, P será p -dominado. A multilinear simétrica $\check{P} : X \times \cdots \times X \rightarrow Y$ associada a P é dada por

$$\begin{aligned} \check{P}(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{1}{n} \left[\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{n-1})T(x_n) + \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{n-2})\varphi(x_n)T(x_{n-1}) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n)T(x_1) \right], \end{aligned}$$

e daí obtemos

$$\check{P}(a, \dots, a, x) = \frac{1}{n} [\varphi(a)^{n-1}T(x) + (n-1)\varphi(a)^{n-2}\varphi(x)T(a)].$$

É claro que φ é absolutamente p -somante. Pela proposição anterior, $\check{P}(a, \dots, a, \cdot)$ é absolutamente p -somante. Logo, como $\mathcal{L}_{as,p}(X; Y)$ é um espaço vetorial, segue que T é absolutamente p -somante.

Para $m = 2$, considere $Q : X \rightarrow Y$ um polinômio 2-homogêneo contínuo qualquer. Defina $P : X \rightarrow Y$ por

$$P(x) = \varphi(x)^{n-2}Q(x),$$

onde φ é um funcional linear contínuo não nulo. Novamente, temos que

$$\begin{aligned} \check{P}(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left[\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{n-2})\check{Q}(x_{n-1}, x_n) + \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{n-1})\check{Q}(x_{n-2}, x_n) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \varphi(x_3) \cdots \varphi(x_n)\check{Q}(x_1, x_2) \right], \end{aligned}$$

onde, em cada parcela, os termos que aparecem calculados em $\check{Q}$ não aparecem no respectivo produto das φ . Assim

$$\begin{aligned} \check{P}(a, \dots, a, x, x) &= \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(\varphi(a)^{n-2}Q(x) + \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right) \varphi(a)^{n-3}\varphi(x)\check{Q}(a, x) \right). \end{aligned}$$

Por hipótese, P é p -dominado. Logo, pela proposição anterior, $\check{P}(a, \dots, a, \cdot, \cdot)$ é p -dominado. É fácil ver que $\varphi(\cdot)\check{Q}(a, \cdot)$ também é p -dominado (usando que φ é absolutamente p -somante e o caso $m = 1$). Como $\mathcal{P}_{d,p}({}^2X; Y)$ é um espaço vetorial, segue que Q é p -dominado.

Prosseguimos com o mesmo raciocínio para os outros casos. ■

O próximo resultado responde afirmativamente a Conjectura 2.3.1 para o caso de escalares reais:

Teorema 3.3.4 *Seja $r \geq 1$ e X um espaço de Banach real de dimensão infinita. Se $m \in \mathbb{N}$ é tal que*

$$\begin{aligned} m &> r, \text{ se } m \geq 4 \text{ é par} \\ m &> r + 1, \text{ se } m \geq 5 \text{ é ímpar,} \end{aligned}$$

então

$$\mathcal{P}_{d,r}(^m X) \neq \mathcal{P}(^m X).$$

Demonstração. Considere $m \geq 4$ par e $r < m$. Se

$$\mathcal{P}_{d,r}(^m X) = \mathcal{P}_{as(\frac{r}{m};r)} = \mathcal{P}(^m X),$$

então, pelo Teorema 3.3.1, temos que

$$id_X \text{ é } \left(\frac{m \frac{r}{m}}{1 - \frac{r}{m}}, r \right) - \text{somante}.$$

Como $m \geq 4$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} - \frac{1}{\frac{m \frac{r}{m}}{1 - \frac{r}{m}}} &= \frac{1}{r} - \frac{1 - \frac{r}{m}}{r} \\ &= \frac{1 - 1 + \frac{r}{m}}{r} \\ &= \frac{\frac{r}{m}}{r} = \frac{1}{m} < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e, pelo Teorema 1.4.5, segue que id_X não pode ser $\left(\frac{m \frac{r}{m}}{1 - \frac{r}{m}}; r \right)$ -somante. Logo,

$$\mathcal{P}_{d,r}(^m X) \neq \mathcal{P}(^m X)$$

para $m \geq 4$ par e $r < m$.

Agora, suponha que $m \geq 5$ é ímpar e $m > r + 1$. Então, $m - 1 \geq 4$ e $m - 1$ é par; além disso, temos $m - 1 > r$. Daí, pelo caso anterior, temos

$$\mathcal{P}_{d,r}(^{m-1} X) \neq \mathcal{P}(^{m-1} X).$$

Usando o Lema 3.3.3, concluímos que

$$\mathcal{P}_{d,r}(^m X) \neq \mathcal{P}(^m X).$$

■

Observe que o resultado anterior, embora demonstre a conjectura para o caso de escalares reais, não abrange o caso $m = 3$. A próxima proposição, além do caso $m = 3$, traz alguma informação para o caso $m = 2$:

Proposição 3.3.5 *Se $\cot X > 2$, então*

$$\mathcal{P}_{d,1}({}^mX) \neq \mathcal{P}({}^mX)$$

para $m = 2, 3$.

Demonstração. Considere $m = 2$ e $r = 1$. Então

$$\frac{m \frac{r}{m}}{1 - \frac{r}{m}} = 2$$

Se

$$\mathcal{P}_{d,1}({}^2X) = \mathcal{P}_{as(\frac{1}{m};1)}({}^2X) = \mathcal{P}({}^2X),$$

então, pelo Teorema 3.3.1, segue que id_X é $(2; 1)$ –somante, o que é impossível, pois $\cot X > 2$.

Logo,

$$\mathcal{P}_{d,1}({}^2X) \neq \mathcal{P}({}^2X).$$

Para o caso $m = 3$, o Lema 3.3.3 garante que, como

$$\mathcal{P}_{d,1}({}^2X) \neq \mathcal{P}({}^2X),$$

então

$$\mathcal{P}_{d,1}({}^3X) \neq \mathcal{P}({}^3X).$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] F. Albiac e N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory, Graduate Texts in Mathematics 233, Springer New York, 2006.
- [2] R. Alencar e M. C. Matos, Some classes of multilinear mappings between Banach spaces, Publicaciones Departamento Analisis Matematico, Universidad Complutense Madrid **12**, 1989.
- [3] G. Bennett, Inclusion mappings between l_p spaces, Journal of Functional Analysis **12** (1973), 420-427.
- [4] A. Bernardino, Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.
- [5] G. Botelho, Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials, Proceedings Royal Irish Academy Section A **97** (1997), 145-153.
- [6] G. Botelho e D. Pellegrino, Absolutely summing linear operators into spaces with no finite cotype, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin **6** (2009), 373-378.
- [7] G. Botelho e D. Pellegrino, Absolutely summing polynomials on Banach spaces with unconditional basis, Journal of Mathematical Analysis and Applications **321** (2006), 50-58.
- [8] G. Botelho e D. Pellegrino, Scalar-valued dominated polynomials on Banach spaces, Proceedings of the American Mathematical Society **134** (2006), 1743-1751.
- [9] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, Cotype and absolutely summing linear operators, a aparecer em Mathematische Zeitschrift.
- [10] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, Dominated bilinear forms and 2-homogeneous polynomials, a aparecer em Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences.
- [11] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, Dominated polynomials on infinite dimensional spaces, Proceedings of the American Mathematical Society **138** (2010), 209-216.

- [12] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, Pietsch's factorization theorem for dominated polynomials, *Journal of Functional Analysis* **243** (2007), 257-269.
- [13] R. Cilia e J. Gutiérrez, Dominated, diagonal polynomials on ℓ_p spaces, *Archiv der Mathematik* **84** (2005), 421-431.
- [14] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, Absolutely summing operators, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **43**, 1995.
- [15] S. Dineen, *Complex Analysis on infinite dimensional spaces*, Springer Verlag, London, 2001.
- [16] E. Dubinsky, A. Pełczyński e H. P. Rosenthal, On Banach spaces X for which $\prod_2(L_\infty, X) = B(L_\infty, X)$, *Studia Mathematica* **44** (1972), 617-648.
- [17] M. Fabian, P. Habala, P. Hajék, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant e V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CBS Books in Mathematics, Springer Verlag, 2001.
- [18] H. Jarchow, C. Palazuelos, D. Pérez-García e I. Villanueva, Hahn-Banach extension of multilinear forms and summability, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **336** (2007), 1161-1177.
- [19] J. Lindenstrauss e A. Pełczyński, Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications, *Studia Mathematica* **29** (1968), 276-326.
- [20] J. Lindenstrauss e L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I and II*, Springer Verlag, 1977.
- [21] M.C. Matos. Absolutely summing holomorphic mappings, *Anais da Academia Brasileira de Ciências* **68** (1996), 1-13.
- [22] B. Maurey e G. Pisier, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, *Studia Mathematica* **58** (1976), 45-90.
- [23] Y. Meléndez e A. Tonge, Polynomials and Pietsch Domination Theorem, *Proceedings Royal Irish Academy Section A* **99** (1999), 195-212.
- [24] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, *Mathematical Studies* **120**, North Holland, Amsterdam, 1986.
- [25] A. Nunes, Versões não-lineares do Teorema da Dominação de Pietsch, *Dissertação de Mestrado*, UFPB, 2008.
- [26] D. Pellegrino, Aplicações entre espaços de Banach relacionadas à convergência de séries, *Tese de Doutorado*, UNICAMP, 2002.

- [27] D. Pellegrino, Cotype and absolutely summing homogeneous polynomials in $\mathcal{L}_p$ space, *Studia Mathematica* **157** (2003), 121-131.
- [28] D. Pellegrino, On scalar-valued nonlinear absolutely summing mappings, *Annales Polonici Mathematici* **83**.(2004), 364-370.
- [29] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.
- [30] J. Santos, Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes, *Dissertação de Mestrado*, UFPB, 2008.
- [31] M. Talagrand, Cotype and $(q; 1)$ -summing norms in Banach spaces, *Inventiones Mathematicae* **110** (1992), 545-556.